

Monade d'état local quantique et ensembles nominaux

Soutenance orale

Pierre Cagne

Stage effectué dans le cadre du MPRI
au Laboratoire PPS, Université Paris Diderot

Cohabité par l'Université Paris Diderot et l'École Normale Supérieure

3 septembre 2015

- 1 Théorie algébrique du calcul quantique
- 2 Théorie de Lawvere à arité
- 3 Théorie de Lawvere du calcul quantique
- 4 Conclusion

Termes

Jugement ternaire : $\Delta \mid \Gamma \vdash t$.

Termes

Jugement ternaire : $\Delta \mid \Gamma \vdash t$.

$$\frac{\Delta, a \mid \Gamma \vdash t}{\Delta \mid \Gamma \vdash \text{new}(a.t)}$$



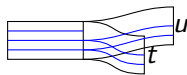
Termes

Jugement ternaire : $\Delta \mid \Gamma \vdash t$.

$$\frac{\Delta, a \mid \Gamma \vdash t}{\Delta \mid \Gamma \vdash \text{new}(a.t)}$$



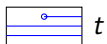
$$\frac{\Delta \mid \Gamma \vdash t \quad \Delta \mid \Gamma \vdash u}{\Delta, a \mid \Gamma \vdash \text{measure}(a, t, u)}$$



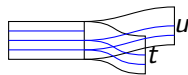
Termes

Jugement ternaire : $\Delta \mid \Gamma \vdash t$.

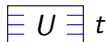
$$\frac{\Delta, a \mid \Gamma \vdash t}{\Delta \mid \Gamma \vdash \text{new}(a.t)}$$



$$\frac{\Delta \mid \Gamma \vdash t \quad \Delta \mid \Gamma \vdash u}{\Delta, a \mid \Gamma \vdash \text{measure}(a, t, u)}$$



$$\frac{\Delta, \vec{b} \mid \Gamma \vdash t}{\Delta, \vec{a} \mid \Gamma \vdash \text{apply}_U(\vec{a}, \vec{b}.t)}$$

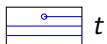


$$\forall U \in \mathbb{U}_{2^n}(\mathbb{C})$$

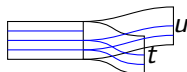
Termes

Jugement ternaire : $\Delta \mid \Gamma \vdash t$.

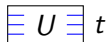
$$\frac{\Delta, a \mid \Gamma \vdash t}{\Delta \mid \Gamma \vdash \text{new}(a.t)}$$



$$\frac{\Delta \mid \Gamma \vdash t \quad \Delta \mid \Gamma \vdash u}{\Delta, a \mid \Gamma \vdash \text{measure}(a, t, u)}$$



$$\frac{\Delta, \vec{b} \mid \Gamma \vdash t}{\Delta, \vec{a} \mid \Gamma \vdash \text{apply}_U(\vec{a}, \vec{b}.t)}$$



$$\forall U \in \mathbb{U}_{2^n}(\mathbb{C})$$

+ contraction/affaiblissement sur Γ + permutations sur Δ et Γ

Axiomes

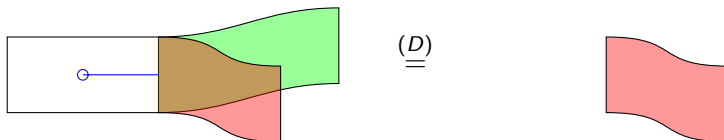
La théorie comporte 12 axiomes.

Axiomes

La théorie comporte 12 axiomes. On se concentre sur :

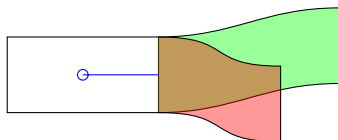
Axiomes

La théorie comporte 12 axiomes. On se concentre sur :

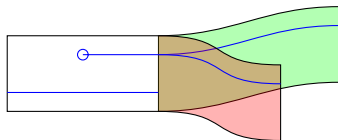
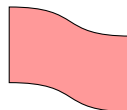


Axiomes

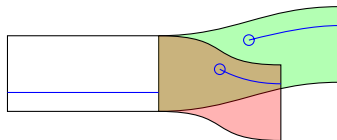
La théorie comporte 12 axiomes. On se concentre sur :



(D)

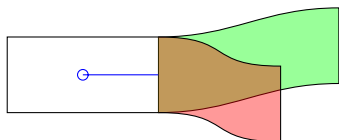


(L)

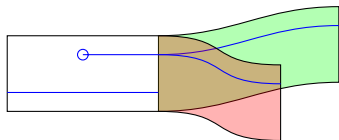
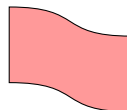


Axiomes

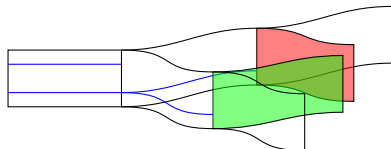
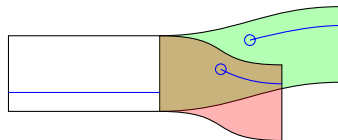
La théorie comporte 12 axiomes. On se concentre sur :



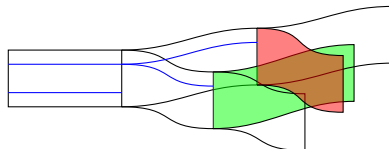
(D)



(L)



(K)



Le *modèle* canonique

Dans le *modèle* présenté par Staton : un programme quantique est une *matrice* de $\mathcal{M}_{2^n}(\mathbb{C})$ pour un $n \geq 0$, et

Le *modèle* canonique

Dans le *modèle* présenté par Staton : un programme quantique est une *matrice* de $\mathcal{M}_{2^n}(\mathbb{C})$ pour un $n \geq 0$, et

$$\text{new} : \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a$$

Le *modèle* canonique

Dans le *modèle* présenté par Staton : un programme quantique est une *matrice* de $\mathcal{M}_{2^n}(\mathbb{C})$ pour un $n \geq 0$, et

$$\text{new}: \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a$$

$$\text{measure}: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), \quad (a, b) \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

Le *modèle* canonique

Dans le *modèle* présenté par Staton : un programme quantique est une *matrice* de $\mathcal{M}_{2^n}(\mathbb{C})$ pour un $n \geq 0$, et

$$\text{new}: \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a$$

$$\text{measure}: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), \quad (a, b) \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

$$\text{apply}_U: \mathcal{M}_{2^n}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_{2^n}(\mathbb{C}), \quad A \mapsto U^*AU$$

(+ applications induites)

Le *modèle canonique*

Dans le *modèle* présenté par Staton : un programme quantique est une *matrice* de $\mathcal{M}_{2^n}(\mathbb{C})$ pour un $n \geq 0$, et

$$\text{new}: \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a$$

$$\text{measure}: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), \quad (a, b) \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

$$\text{apply}_U: \mathcal{M}_{2^n}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_{2^n}(\mathbb{C}), \quad A \mapsto U^*AU$$

(+ applications induites)

Théorème

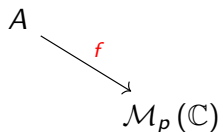
Ce modèle est pleinement complet dans la catégorie $\mathbf{C}_{\text{CPU}}^*$.

Un réduction canonique ?

La preuve passe par le **théorème de dilatation minimale** :

Un réduction canonique?

La preuve passe par le **théorème de dilatation minimale** : $\forall f$



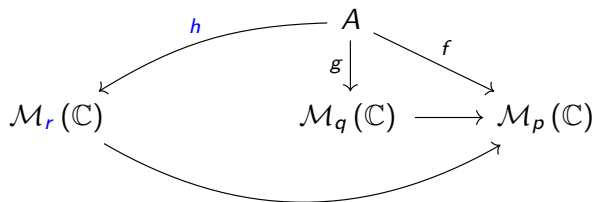
Un réduction canonique?

La preuve passe par le **théorème de dilatation minimale** : $\exists g, q$

$$\begin{array}{ccc} A & & \\ \downarrow g & \searrow f & \\ \mathcal{M}_q(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_p(\mathbb{C}) \end{array}$$

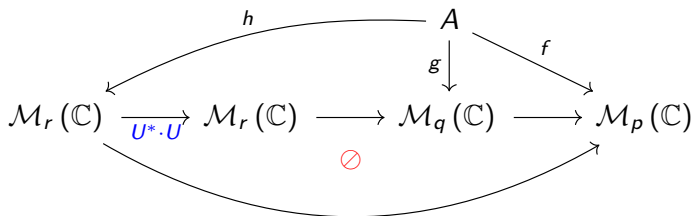
Un réduction canonique ?

La preuve passe par le **théorème de dilatation minimale** : $\forall h, r$



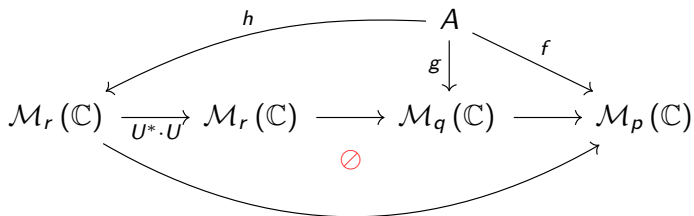
Un réduction canonique ?

La preuve passe par le **théorème de dilatation minimale** : $\exists U$



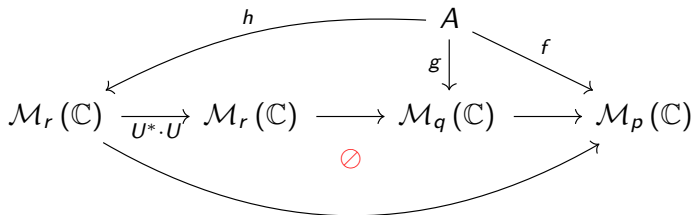
Un réduction canonique ?

La preuve passe par le **théorème de dilatation minimale** :



Un réduction canonique ?

La preuve passe par le **théorème de dilatation minimale** :



Ce résultat montre qu'il est possible d'écrire les termes de la théorie avec un nombre **minimal** de new, tous en tête.

La minimalité du théorème appelle une notion de support quantique.

Notion de support dans le cadre des programmes classiques : ensembles nominaux (Andrew Pitts).

La minimalité du théorème appelle une notion de support quantique.

Notion de support dans le cadre des programmes classiques : ensembles nominaux (Andrew Pitts).

Les ensembles nominaux apparaissent naturellement dans l'étude de la monade d'état local (classique) en tant que [théorie de Lawvere à arité](#).

La minimalité du théorème appelle une notion de support quantique.

Notion de support dans le cadre des programmes classiques : ensembles nominaux (Andrew Pitts).

Les ensembles nominaux apparaissent naturellement dans l'étude de la monade d'état local (classique) en tant que [théorie de Lawvere à arité](#).

Problème

Peut-on exprimer la théorie de Staton comme théorie de Lawvere à arité ?
Quel est alors le critère de nominalité quantique respecté par les modèles ?

- 1 Théorie algébrique du calcul quantique
- 2 Théorie de Lawvere à arité
 - Définitions
 - Arités spécifiques
- 3 Théorie de Lawvere du calcul quantique
- 4 Conclusion

Théories algébriques

Un **monoïde**, c'est :

- un **ensemble** M ,
- une **opération binaire** de multiplication

$$M \times M \rightarrow M,$$

- une **constante** $1 \rightarrow M$

satisfaisant certains axiomes.

Théories algébriques

Un **groupe**, c'est :

- un **ensemble** G ,
- une **opération binaire** de multiplication

$$G \times G \rightarrow G,$$

- une **opération unaire** d'inversion

$$G \rightarrow G$$

- une **constante** $1 \rightarrow G$

satisfaisant certains axiomes.

Théories algébriques

Une **structure algébrique**, c'est :

- un **ensemble** A ,
- pour chaque $n \geq 0$, des **opérations n -aires**

$$A^n \rightarrow A,$$

satisfaisant certains axiomes.

Théories algébriques

Une **structure algébrique**, c'est :

- un **ensemble** A ,
- pour chaque $n \geq 0$, des **opérations** n -aires

$$A^n \rightarrow A,$$

satisfaisant certains axiomes.

Point de vue catégorique (Lawvere)

Une **structure algébrique** est un foncteur $A: \Theta \rightarrow \text{Ens}$ respectant les produits finis, où

- les objets de Θ sont les entiers,
- les morphismes $n \rightarrow 1$ sont les opérations n -aires,
- n est le produit $1 \times \cdots \times 1$.

Les axiomes deviennent des diagrammes commutatifs dans Θ .

Théories algébriques à arité

Quid des structures à arités **non entières** ?

Théories algébriques à arité

Quid des structures à arités **non entières** ?

Une **catégorie**, c'est :

- un graphe $\mathbf{C}$,
- pour chaque $n \geq 0$, une **opération de composition**

$$\{\text{chemins de longueur } n \text{ de } \mathbf{C}\} \rightarrow \mathbf{C}.$$

satisfaisant certains axiomes.

Théories algébriques à arité

Quid des structures à arités **non entières** ?

Une **catégorie**, c'est :

- un graphe $\mathbf{C}$,
- pour chaque $n \geq 0$, une **opération de composition**

$$\{\text{chemins de longueur } n \text{ de } \mathbf{C}\} \rightarrow \mathbf{C}.$$

satisfaisant certains axiomes.

Point de vue catégorique

Une **catégorie** est un foncteur $\mathbf{C}: \Theta \rightarrow \text{Ens}$, où

- les objets de Θ sont les graphes linéaires,
- les morphismes $\Delta_n \rightarrow \Delta_1$ sont les opérations de composition

et tel qu'il existe un graphe G satisfaisant

$$\mathbf{C}(\Delta_n) = \text{Graph}(\Delta_n, G).$$

Théories algébriques à arité

Quid des structures à arités **non entières** ?

Une **structure algébrique** d'arité $\mathbf{A} \hookrightarrow \mathbf{E}$, c'est :

- un objet E de $\mathbf{E}$,
- pour chaque $a, b \in \mathbf{A}$, des **opérations** (a, b) -aires

$$\mathbf{E}(a, E) \rightarrow \mathbf{E}(b, E).$$

satisfaisant certains axiomes.

Point de vue catégorique (Berger, Melliès, Weber)

Une **structure algébrique** d'arité $\mathbf{A} \hookrightarrow \mathbf{E}$ est un foncteur $F: \Theta \rightarrow \mathbf{Ens}$, où

- les objets de Θ sont ceux de $\mathbf{A}$,
- les morphismes $a \rightarrow b$ sont les opérations (a, b) -aires,

et tel qu'il existe un objet E de $\mathbf{E}$ satisfaisant

$$F(a) = \mathbf{E}(a, E) \quad \forall a \in \mathbf{A}.$$

Théories algébriques à arité

Quid des structures à arités **non entières** ?

Une **structure algébrique** d'arité $\mathbf{A} \hookrightarrow \mathbf{E}$, c'est :

- un objet E de $\mathbf{E}$,
- pour chaque $a, b \in \mathbf{A}$, des **opérations** (a, b) -aires

$$\mathbf{E}(a, E) \rightarrow \mathbf{E}(b, E).$$

satisfaisant certains axiomes.

En fait, il faut
 $j: \mathbf{A} \rightarrow \Theta^\circ$
bijectif sur les objets.

Point de vue catégorique (Berger, Melliès, Weber)

Une **structure algébrique** d'arité $\mathbf{A} \hookrightarrow \mathbf{E}$ est un foncteur $F: \Theta \rightarrow \mathbf{Ens}$, où

- les objets de Θ sont ceux de $\mathbf{A}$,
- les morphismes $a \rightarrow b$ sont les opérations (a, b) -aires,

et tel qu'il existe un objet E de $\mathbf{E}$ satisfaisant

$$F(a) = \mathbf{E}(a, E) \quad \forall a \in \mathbf{A}.$$

Arité ΣM

ΣM : sous-catégorie pleine de $\hat{M}$ dont les objets sont les **sommes finies** de représentables.

Arité ΣM

ΣM : sous-catégorie pleine de $\hat{M}$ dont les objets sont les *sommes finies* de représentables.

Le foncteur $i: \Sigma M \rightarrow \hat{M}$ est évidemment une arité.

Arité $\Sigma \mathbf{M}$

$\Sigma \mathbf{M}$: sous-catégorie pleine de $\hat{\mathbf{M}}$ dont les objets sont les **sommes finies** de représentables.

Le foncteur $i: \Sigma \mathbf{M} \rightarrow \hat{\mathbf{M}}$ est évidemment une arité.

Si $\mathbf{M}$ est monoidale, les catégories $\Sigma \mathbf{M}$ et $\hat{\mathbf{M}}$ héritent d'une **action** de $\mathbf{M}$.
Alors,

Arité $\Sigma \mathbf{M}$

$\Sigma \mathbf{M}$: sous-catégorie pleine de $\widehat{\mathbf{M}}$ dont les objets sont les **sommes finies** de représentables.

Le foncteur $i: \Sigma \mathbf{M} \rightarrow \widehat{\mathbf{M}}$ est évidemment une arité.

Si $\mathbf{M}$ est monoidale, les catégories $\Sigma \mathbf{M}$ et $\widehat{\mathbf{M}}$ héritent d'une **action** de $\mathbf{M}$.
Alors,

Lemme

Il existe un foncteur

$$\widehat{\Sigma \mathbf{M}} \rightarrow [\Sigma \mathbf{M}^\circ, \widehat{\mathbf{M}}]$$

induisant une **équivalence de catégories** entre les préfaisceaux de la forme $\widehat{\mathbf{M}}(i-, G)$ et les foncteurs $\Sigma \mathbf{M}^\circ \rightarrow \widehat{\mathbf{M}}$ commutant aux **produits finis** et à l'**action** de $\mathbf{M}$.

Arité $\Sigma \mathbf{M}$ (suite)

Pour une théorie de Lawvere $j: \Sigma \mathbf{M} \rightarrow \Theta$, un modèle est *moralement la même chose* qu'un foncteur $M: \Theta^\circ \rightarrow \hat{\mathbf{M}}$ tel que j^*M commute aux produits finis et à l'action de $\mathbf{M}$.

Arité $\Sigma \mathbf{M}$ (suite)

Pour une théorie de Lawvere $j: \Sigma \mathbf{M} \rightarrow \Theta$, un modèle est *moralement la même chose* qu'un foncteur $M: \Theta^\circ \rightarrow \hat{\mathbf{M}}$ tel que j^*M commute aux produits finis et à l'action de $\mathbf{M}$.

D'où généralisation :

Définition

Un modèle de j est un foncteur $M: \Theta^\circ \rightarrow \mathbf{E}$ tel que j^*M commute aux produits finis et à l'action de $\mathbf{M}$.

- 1 Théorie algébrique du calcul quantique
- 2 Théorie de Lawvere à arité
- 3 Théorie de Lawvere du calcul quantique
 - Théorie de Lawvere
 - Ensemble nominaux
- 4 Conclusion

Catégorie Θ_Q

Bij : catégorie des ordinaux finis et **bijections** entre eux, munie du produit monoidal $m \otimes n = m + n$.

Catégorie Θ_Q

Bij : catégorie des ordinaux finis et **bijections** entre eux, munie du produit monoidal $m \otimes n = m + n$.

On définit Θ_Q comme la catégorie engendrée **librement** au-dessus de ΣBij par

$$\text{new} : 0 \rightarrow 1$$

$$\text{measure} : 1 \rightarrow (0, 0)$$

$$\text{apply}_U : n \rightarrow n$$

Catégorie Θ_Q

Bij : catégorie des ordinaux finis et **bijections** entre eux, munie du produit monoidal $m \otimes n = m + n$.

On définit Θ_Q comme la catégorie engendrée **librement** au-dessus de ΣBij par

$$\text{new} : 0 \rightarrow 1$$

$$\text{measure} : 1 \rightarrow (0, 0)$$

$$\text{apply}_U : n \rightarrow n$$

+ action de Bij + coproduits finis.

Catégorie Θ_Q

Bij : catégorie des ordinaux finis et **bijections** entre eux, munie du produit monoidal $m \otimes n = m + n$.

On définit Θ_Q comme la catégorie engendrée **librement** au-dessus de ΣBij par

$$\text{new} : 0 \rightarrow 1$$

$$\text{measure} : 1 \rightarrow (0, 0)$$

$$\text{apply}_U : n \rightarrow n$$

+ action de **Bij** + coproduits finis.

Proposition

Le foncteur $j_Q : \Sigma \text{Bij} \rightarrow \Theta_Q$ est une théorie de Lawvere à arité.
Ses modèles sont exactement les modèles de la théorie de Staton.

Nominalité

On construit de même Θ_{coll} la catégorie associée à la théorie où l'unique opérateur est **coll** respectant l'axiome :

$$\text{coll}(a, \text{coll}(b, x)) = \text{coll}(b, \text{coll}(a, x)).$$

Nominalité

On construit de même Θ_{coll} la catégorie associée à la théorie où l'unique opérateur est **coll** respectant l'axiome :

$$\text{coll}(a, \text{coll}(b, x)) = \text{coll}(b, \text{coll}(a, x)).$$

Miracle : Θ_{coll} est isomorphe à $\Sigma(\text{Inj}^\circ)$. Un modèle de $j_{\text{coll}} : \Sigma\text{Bij} \rightarrow \Theta_{\text{coll}}$ est donc simplement un foncteur $\text{Inj} \rightarrow \text{Ens}$.

Nominalité

On construit de même Θ_{coll} la catégorie associée à la théorie où l'unique opérateur est **coll** respectant l'axiome :

$$\text{coll}(a, \text{coll}(b, x)) = \text{coll}(b, \text{coll}(a, x)).$$

Miracle : Θ_{coll} est isomorphe à $\Sigma(\text{Inj}^\circ)$. Un modèle de $j_{\text{coll}} : \Sigma \text{Bij} \rightarrow \Theta_{\text{coll}}$ est donc simplement un foncteur $\text{Inj} \rightarrow \text{Ens}$.

Définition

Un ensemble **nominal** est un foncteur $\text{Inj} \rightarrow \text{Ens}$ préservant les **produits fibrés**.

Nominalité

On construit de même Θ_{coll} la catégorie associée à la théorie où l'unique opérateur est **coll** respectant l'axiome :

$$\text{coll}(a, \text{coll}(b, x)) = \text{coll}(b, \text{coll}(a, x)).$$

Miracle : Θ_{coll} est isomorphe à $\Sigma(\text{Inj}^\circ)$. Un modèle de $j_{\text{coll}} : \Sigma \text{Bij} \rightarrow \Theta_{\text{coll}}$ est donc simplement un foncteur $\text{Inj} \rightarrow \text{Ens}$.

Corollaire

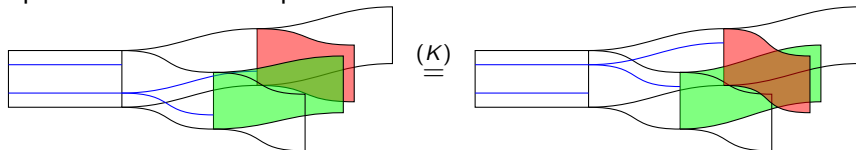
Un ensemble **nominal** est un modèle de j_{coll} envoyant les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} n & \xrightarrow{\iota_i^n} & n+1 \\ \iota_{j-1}^n \downarrow & & \downarrow \iota_j^{n+1} \\ n+1 & \xrightarrow{\iota_i^{n+1}} & n+2 \end{array} \quad (i < j)$$

sur des **produits fibrés**.

Nominalité

On construit de même Θ_{meas} la catégorie associée à la théorie où l'unique opérateur est **meas** respectant l'axiome :



Définition

Un ensemble **qnominal** est un modèle de J_{meas} envoyant les diagrammes

$$\begin{array}{ccccc}
 (n, n, n, n) & \xleftarrow{(1 \ 3 \ 2 \ 4)} & (n, n, n, n) & \xleftarrow{\text{meas}_i^n \oplus \text{meas}_i^n} & (n+1, n+1) \\
 \text{meas}_{j-1}^n \oplus \text{meas}_{j-1}^n \uparrow & & & & \uparrow \text{meas}_j^{n+1} \\
 (n+1, n+1) & \xleftarrow{\text{meas}_i^{n+1}} & & & n+2
 \end{array}$$

sur des **produits fibrés**.

Support quantique

Support

Soit M un ensemble **qnominal**. Le **support quantique** d'un élément $x \in M_n$ est

$$\text{supp}(x) = \{i \in \{0, \dots, n-1\} : \forall y, x \neq \text{meas}_i^{n-1}(y)\}.$$

Qnominalité du calcul quantique

La théorie Q contient la théorie de meas, d'où un morphisme de théorie de Lawvere à arité $k: j_{\text{meas}} \rightarrow j_Q$.

Proposition

Soit M un modèle de Q . Alors k^*M est qnominal.

Qnominalité du calcul quantique

La théorie Q contient la théorie de meas, d'où un morphisme de théorie de Lawvere à arité $k: j_{\text{meas}} \rightarrow j_Q$.

Proposition

Soit M un modèle de Q . Alors k^*M est qnominal.

Preuve.

On se ramène à montrer que si $x \in M_2$ tel que

$$\text{measure}(a, t, u) = x = \text{measure}(b, v, w),$$

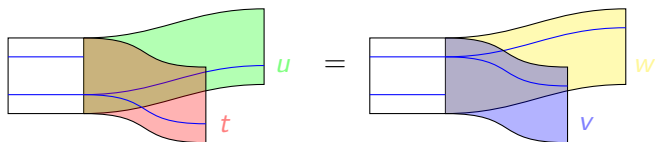
alors $\exists y_1, y_2, y_3, y_4 \in M_0$,

$$t = \text{measure}(b, y_1, y_2), \quad u = \text{measure}(b, y_3, y_4)$$

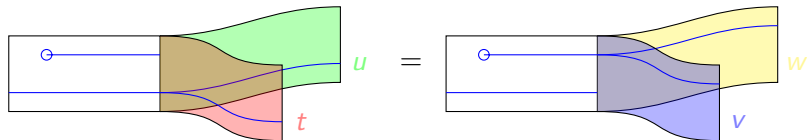
$$v = \text{measure}(a, y_1, y_3), \quad w = \text{measure}(a, y_2, y_4)$$



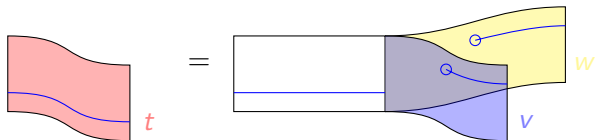
Preuve graphique



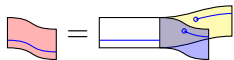
Preuve graphique



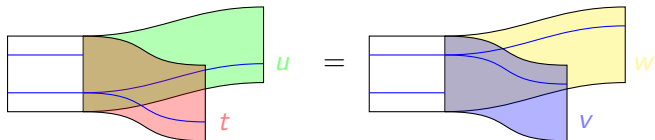
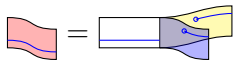
Preuve graphique



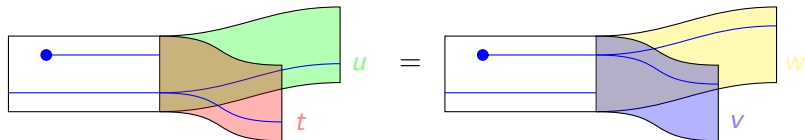
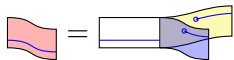
Preuve graphique



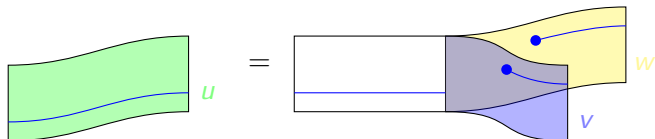
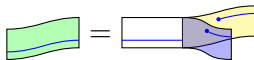
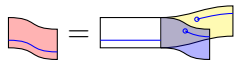
Preuve graphique



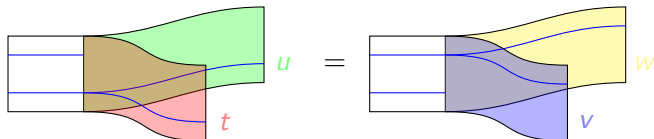
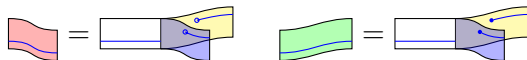
Preuve graphique



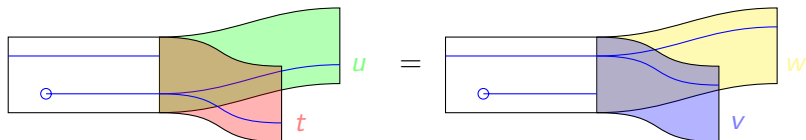
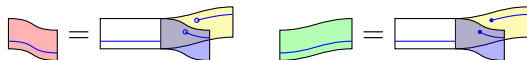
Preuve graphique



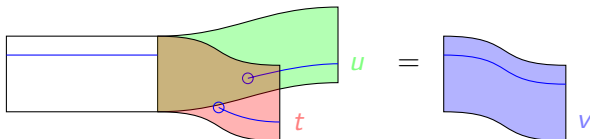
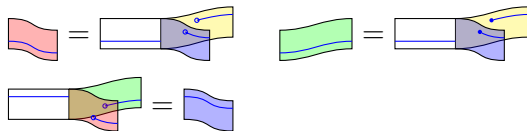
Preuve graphique



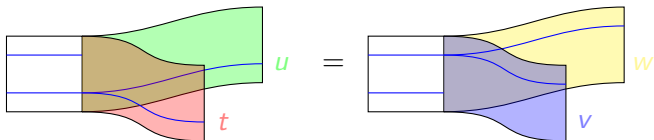
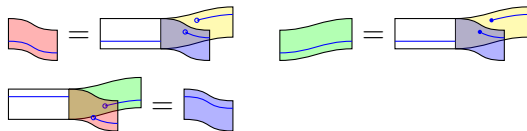
Preuve graphique



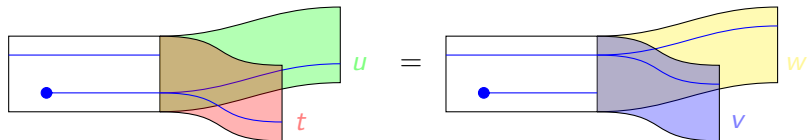
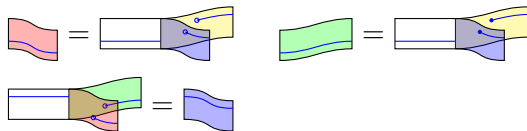
Preuve graphique



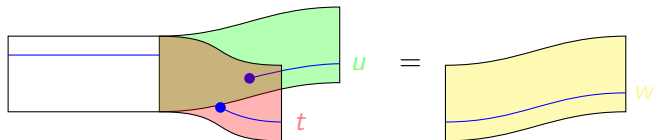
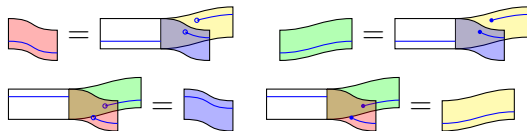
Preuve graphique



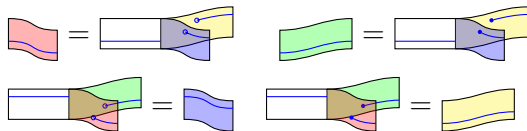
Preuve graphique



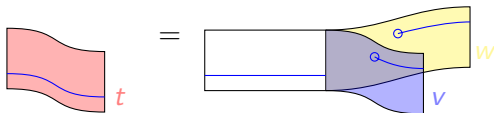
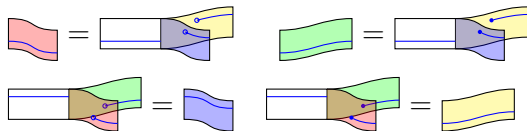
Preuve graphique



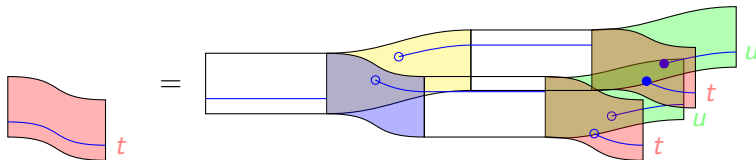
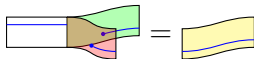
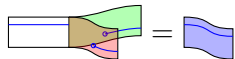
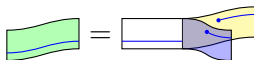
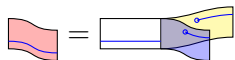
Preuve graphique



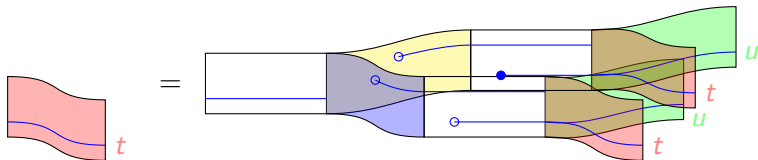
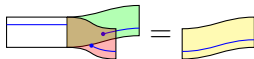
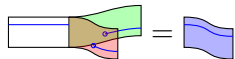
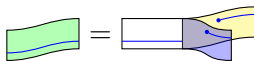
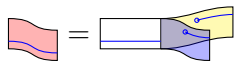
Preuve graphique



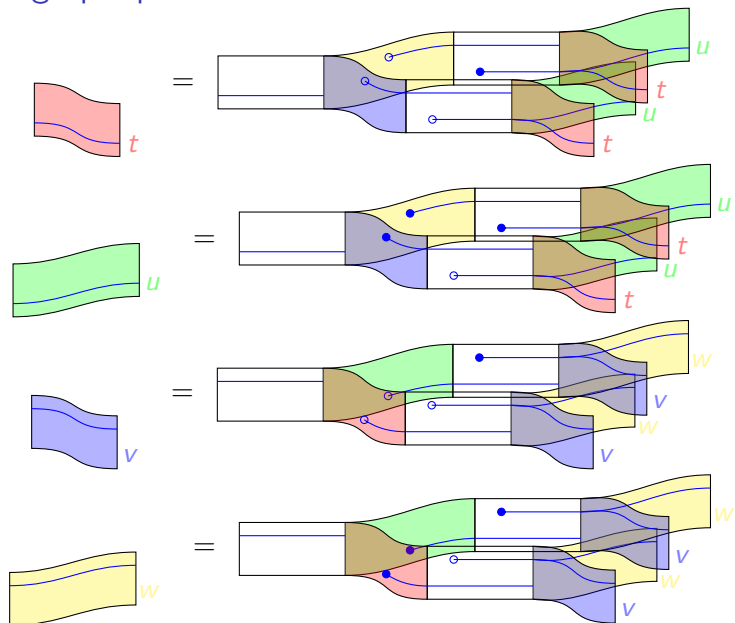
Preuve graphique



Preuve graphique



Preuve graphique



- 1 Théorie algébrique du calcul quantique
- 2 Théorie de Lawvere à arité
- 3 Théorie de Lawvere du calcul quantique
- 4 Conclusion

Travaux futurs

- 1 Relier formellement la **taille** du support quantique et la **minimalité** décrite dans l'article de Staton.

Travaux futurs

- ① Relier formellement la **taille** du support quantique et la **minimalité** décrite dans l'article de Staton.
- ② Les ensembles nominaux sont exactement les **faisceaux** pour une topologie de Grothendieck sur Inj . Quid des ensembles qnominaux ?

Travaux futurs

- ➊ Relier formellement la **taille** du support quantique et la **minimalité** décrite dans l'article de Staton.
- ➋ Les ensembles nominaux sont exactement les **faisceaux** pour une topologie de Grothendieck sur Inj . Quid des ensembles qnominaux ?
- ➌ Le processus de généralisation des ensembles nominaux aux qnominaux semble assez systématique. Vers une notion de **support généralisé** ?

Merci.

`http://www.eleves.ens.fr/home/cagne`

Théorie de Lawvere à arité

Le foncteur $\mathbb{N}_0 \xrightarrow{i} \mathbf{Ens}$ est un plongement qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{N}_0 & \\ 1 \nearrow & & \searrow i \\ e & \xrightarrow{\eta} & \mathbf{Ens} \end{array}$$

Théorie de Lawvere à arité

Le foncteur $\aleph_0 \xrightarrow{i} \mathbf{Ens}$ est un plongement qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \aleph_0 & \\ 1 \nearrow & & \searrow i \\ e & \xrightarrow{\eta} & \mathbf{Ens} \end{array}$$

Définition

Une **théorie de Lawvere** est un foncteur $j: \aleph_0 \rightarrow \Theta$ bijectif sur les objets et respectant les coproduits finis.

Théorie de Lawvere à arité

Le foncteur $\aleph_0 \xrightarrow{i} \mathbf{Ens}$ est un plongement qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \aleph_0 & \\ 1 \nearrow & & \searrow i \\ e & \xrightarrow{\eta} & \mathbf{Ens} \end{array}$$

Définition

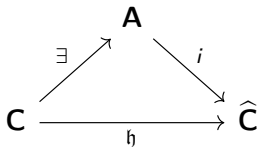
Une **théorie de Lawvere** est un foncteur $j: \aleph_0 \rightarrow \Theta$ bijectif sur les objets et tel que

$$\widehat{\aleph_0} \xrightarrow{j_!} \widehat{\Theta} \xrightarrow{j^*} \widehat{\aleph_0}$$

envoie les foncteurs $\mathbf{Ens}(i-, S)$ sur des foncteurs $\mathbf{Ens}(i-, T)$.

Théorie de Lawvere à arité

Une arité $\mathbf{A} \xrightarrow{i} \hat{\mathbf{C}}$ est un plongement qui fait commuter le diagramme



Définition

Une théorie de Lawvere d'arité i est un foncteur $j: \mathbf{A} \rightarrow \Theta$ bijectif sur les objets et tel que

$$\hat{\mathbf{A}} \xrightarrow{j_!} \hat{\Theta} \xrightarrow{j^*} \hat{\mathbf{A}}$$

envoie les foncteurs $\hat{\mathbf{C}}(i-, S)$ sur des foncteurs $\hat{\mathbf{C}}(i-, T)$.

Modèles

Soit $j: \mathbb{N}_0 \rightarrow \Theta$ une théorie de Lawvere et $i: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbf{Ens}$.

Définition

Un **modèle** de j est un foncteur $M: \Theta^\circ \rightarrow \mathbf{E}$ commutant aux produits finis.

Modèles

Soit $j: \mathbb{N}_0 \rightarrow \Theta$ une théorie de Lawvere et $i: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbf{Ens}$.

Définition

Un **modèle ensembliste** de j est un foncteur $M: \Theta^\circ \rightarrow \mathbf{Ens}$ tel que j^*M est de la forme $\mathbf{Ens}(i-, S)$.

Modèles

Soit $j: \mathbf{A} \rightarrow \Theta$ une théorie de Lawvere d'arité $i: \mathbf{A} \rightarrow \hat{\mathbf{C}}$.

Définition

Un **modèle ensembliste** de j est un foncteur $M: \Theta^\circ \rightarrow \mathbf{Ens}$ tel que j^*M est de la forme $\hat{\mathbf{C}}(i-, S)$.

Modèles

Soit $j: \mathbf{A} \rightarrow \Theta$ une théorie de Lawvere d'arité $i: \mathbf{A} \rightarrow \hat{\mathbf{C}}$.

Définition

Un **modèle ensembliste** de j est un foncteur $M: \Theta^\circ \rightarrow \mathbf{Ens}$ tel que j^*M est de la forme $\hat{\mathbf{C}}(i-, S)$.

Question

Le passage à l'arité fait-il ainsi perdre les modèles non ensemblistes ?

Modèles

Soit $j: \mathbf{A} \rightarrow \Theta$ une théorie de Lawvere d'arité $i: \mathbf{A} \rightarrow \hat{\mathbf{C}}$.

Définition

Un **modèle ensembliste** de j est un foncteur $M: \Theta^\circ \rightarrow \mathbf{Ens}$ tel que j^*M est de la forme $\hat{\mathbf{C}}(i-, S)$.

Question

Le passage à l'arité fait-il ainsi perdre les modèles non ensemblistes ?

En toute généralité **oui**.

Modèles

Soit $j: \mathbf{A} \rightarrow \Theta$ une théorie de Lawvere d'arité $i: \mathbf{A} \rightarrow \hat{\mathbf{C}}$.

Définition

Un **modèle ensembliste** de j est un foncteur $M: \Theta^\circ \rightarrow \mathbf{Ens}$ tel que j^*M est de la forme $\hat{\mathbf{C}}(i-, S)$.

Question

Le passage à l'arité fait-il ainsi perdre les modèles non ensemblistes ?

En toute généralité **oui**. Pour certaines arités, l'obstruction peut-être levée...