

Université Pierre et Marie Curie

Mémoire de Master 2^e année

rédigé dans le cadre du Master de Mathématiques Fondamentales de
l'Université Pierre et Marie Curie

Le localisateur fondamental minimal

Étudiant : *Pierre Cagne*

Encadrant : *Georges Maltsiniotis*

Résumé

Ce document constitue le mémoire que j'ai rédigé dans le cadre du Master de Mathématiques Fondamentales de l'UPMC. Celui-ci consistait en une lecture détaillée et suivie de l'article [Cis04], sous la direction de Georges Maltsiniotis. On y démontre une conjecture de Grothendieck, énoncée dans le tapuscrit [Gro83] : il existe un localisateur fondamental minimal (au sens de l'inclusion) dans la catégorie des petites catégories.

Ce document est publié sous licence Creative Commons — Attribution — Share Alike 4.0 International (CC-BY-SA 4.0). Le texte légal complet de la licence peut se trouver à l'adresse :

<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>

Table des matières

Introduction	1
1 Localisateurs fondamentaux	4
1.1 Axiomatique	4
1.2 Quelques propriétés	8
1.3 Autodualité	11
2 Outils homotopiques	19
2.1 Extensions de Kan	19
2.2 Ensembles simpliciaux	23
2.3 Types d'homotopies catégoriques	25
2.4 Limites et colimites homotopiques	29
2.5 Quelques catégories de modèles	35
3 Localisateur fondamental minimal	44
3.1 Les ∞ -équivalences comme équivalences faibles	44
3.2 Les ∞ -équivalences comme localisateur fondamental	58

Introduction

Cadre ensembliste

On utilisera l'axiomatique des univers de Grothendieck (voir [AGV72]). Pour un univers $\mathbb{X}$, on dira d'un ensemble qu'il est $\mathbb{X}$ -*petit* s'il est élément de $\mathbb{X}$. Une $\mathbb{X}$ -catégorie $\mathcal{C}$ est une catégorie telle que pour tout $x, y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ l'ensemble $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ est $\mathbb{X}$ -petit. Une catégorie $\mathbb{X}$ -petite est une $\mathbb{X}$ -catégorie dont l'ensemble des objets $\text{Ob } \mathcal{C}$ est $\mathbb{X}$ -petit.

Dans tout le document, on fixe un univers $\mathbb{U}$. Pour ne pas alourdir inutilement le texte, on dira simplement *petit* pour $\mathbb{U}$ -petit. On note Cat la catégorie des petites catégories. Les axiomes d'univers assurent alors l'existence d'un univers $\mathbb{V} \ni \mathbb{U}$ tel que Cat soit $\mathbb{V}$ -petite. Dans la même optique que précédemment, on dira *large* pour $\mathbb{V}$ -petit. Enfin, on introduit un dernier univers $\mathbb{W} \ni \mathbb{V}$ tel que la catégorie CAT des $\mathbb{U}$ -catégories $\mathbb{V}$ -petites soit $\mathbb{W}$ -petite.

Dans la suite, une *catégorie* sera par défaut une catégorie large localement petite, i.e. une catégorie $\mathcal{C}$ avec $\text{Ob } \mathcal{C} \in \mathbb{V}$ et $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \in \mathbb{U}$ pour tout couple d'objets (x, y) de $\mathcal{C}$. Un *ensemble* sera par défaut un petit ensemble.

Enfin, la catégorie des (petits) ensembles sera noté Set . Le reste des catégories utilisées seront introduites dans le texte aux moments propices.

Origines

Dans *Pursuing Stacks* [Gro83], Grothendieck tente de dégager la notion de catégorie modélisant les types d'homotopies. C'est-à-dire qu'il cherche des conditions suffisantes sur une catégorie $\mathcal{M}$ munie d'un ensemble $\mathcal{W} \subseteq \text{Mor } \mathcal{M}$ pour que la catégorie localisée (au sens de Gabriel-Zisman) $\mathcal{W}^{-1}\mathcal{M}$ soit équivalente à la catégorie Hot , dont les objets sont les CW-complexes et les morphismes sont les applications continues modulo homotopies. Il appelle un tel couple $(\mathcal{M}, \mathcal{W})$ un *modélisateur* et échoue rapidement à trouver une caractérisation satisfaisante en toute généralité. Cependant, un modélisateur bien connu est $(\widehat{\Delta}, W_{\widehat{\Delta}})$ formé de la catégorie $\widehat{\Delta}$ des ensembles simpliciaux et de l'ensemble $W_{\widehat{\Delta}}$ des applications d'ensembles simpliciaux dont la réalisation topologique est une équivalence d'homotopie faible. Partant, Grothendieck concentre son effort de caractérisation des modélisateurs $(\mathcal{M}, \mathcal{W})$ au cas où $\mathcal{M}$ est une catégorie de préfaisceaux $\widehat{\mathcal{A}}$. Il dégage alors la notion de *catégorie test faible* : c'est une petite catégorie $\mathcal{A}$ qui « se comporte comme » Δ d'un point de vue homotopique. Plus précisément, le foncteur

$$i_{\mathcal{A}} : \widehat{\mathcal{A}} \rightarrow \text{Cat},$$

associant à tout préfaisceau P la sous-catégorie pleine de $\widehat{\mathcal{A}}_P$ constituée des $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, a)$, admet un adjoint à droite

$$i_{\mathcal{A}}^* : \text{Cat} \rightarrow \widehat{\mathcal{A}}, \quad \mathcal{C} \mapsto \text{Hom}_{\text{Cat}}(\mathcal{A}_{/-}, \mathcal{C}).$$

Notons $\mathcal{W}_{\infty}$ l'ensemble des foncteurs dont le nerf est dans $W_{\widehat{\mathcal{A}}}$, et $W_{\widehat{\mathcal{A}}}$ les morphismes de $\widehat{\mathcal{A}}$ envoyés dans $\mathcal{W}_{\infty}$ par $i_{\mathcal{A}}$. Par définition, $i_{\mathcal{A}}(W_{\widehat{\mathcal{A}}}) \subseteq \mathcal{W}_{\infty}$, induisant par la propriété universelle de la localisation un foncteur

$$\iota_{\mathcal{A}} : W_{\widehat{\mathcal{A}}}^{-1} \widehat{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{W}_{\infty}^{-1} \text{Cat}.$$

Si de plus $i_{\mathcal{A}}^*(\mathcal{W}_{\infty}) \subseteq W_{\widehat{\mathcal{A}}}$ et le foncteur induit

$$\iota_{\mathcal{A}}^* : \mathcal{W}_{\infty}^{-1} \text{Cat} \rightarrow W_{\widehat{\mathcal{A}}}^{-1} \widehat{\mathcal{A}}$$

est un quasi-inverse de $\iota_{\mathcal{A}}$, alors $\mathcal{A}$ est dite catégorie test faible. Le couple $(\widehat{\mathcal{A}}, W_{\widehat{\mathcal{A}}})$ est alors un modélisateur. De plus, Grothendieck trouve un critère simple pour déterminer si une catégorie est test faible ou non : une petite catégorie $\mathcal{A}$ est test faible si et seulement si pour toute petite catégorie $\mathcal{C}$ admettant un objet final l'unique morphisme $i_{\mathcal{A}} i_{\mathcal{A}}^*(\mathcal{C}) \rightarrow e$ (où e est l'objet final de Cat) est dans $\mathcal{W}_{\infty}$.

Grothendieck réalise alors que les preuves des différents résultats obtenus jusqu'alors n'utilisent pas $\mathcal{W}_{\infty}$ en tant que tel, mais principalement une de ses propriétés « à la Théorème A de Quillen » : si un $\mathcal{C}$ -foncteur $u : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ induit des $\mathcal{C}_{/c}$ -foncteurs $\mathcal{A}_{/c} \rightarrow \mathcal{B}_{/c}$ dans $\mathcal{W}_{\infty}$ pour tout objet c de $\mathcal{C}$, alors u est lui-même élément de $\mathcal{W}_{\infty}$. Il cherche alors une axiomatisation des ensembles $\mathcal{W}$ de flèches de Cat permettant de définir une version relative de $\mathcal{W}$ -catégorie test faible. Outre une abstraction élégante de la notion d'équivalence faible, cette généralisation permet de décliner la théorie des catégories tests selon des choix judicieux de $\mathcal{W}$ afin d'établir des catégories de préfaisceaux $\widehat{\mathcal{A}}$ comme modèles de la catégorie $\mathcal{W}^{-1} \text{Cat}$. C'est à l'étude de cette axiomatisation des *localisateurs fondamentaux* $\mathcal{W}$ que ce document s'attèle, et plus spécifiquement à la preuve par Cisinski du résultat suivant (conjecturé par Grothendieck dans [Gro83]) :

Théorème. *L'ensemble $\mathcal{W}_{\infty}$ est un localisateur fondamental, inclus dans tout localisateur fondamental $\mathcal{W}$.*

Conséquence notable : on dispose d'une description de $\mathcal{W}_{\infty}$, et donc de la catégorie homotopique Hot , entièrement combinatoire, indépendante de toute notion topologique.

Plan du document

Le document s'articule autour de trois chapitres. Le premier est consacré à l'introduction des localisateurs fondamentaux et à leurs propriétés. C'est en grande partie une réécriture du premier chapitre de [Cis04]. Il contient cependant plus de détail et fait les rappels catégoriques nécessaires.

Le deuxième chapitre est dédié à l'introduction des outils de l'algèbre homotopique. Il fait notamment la part belle aux techniques simpliciales et définit des structures de catégorie de modèles sur les catégories utiles par la suite. Beaucoup de résultats y sont admis, avec néanmoins des références vers les preuves présentes

dans la littérature. Le choix de ne pas directement référer à la littérature pour les notions introduites dans ce chapitre peut alors surprendre. Il s'explique en cela que ce document constitue le premier contact de l'auteur avec le monde homotopique et simplicial. Il lui a donc fallu se familiariser avec ces concepts, et ce second chapitre résulte de son processus d'appréhension de ces derniers.

Le troisième et dernier chapitre exploite le matériel des précédents chapitres pour donner une preuve de la conjecture sus-citée. La première partie est dédiée à la preuve de minimalité : tout localisateur fondamental contient les ∞ -équivalences. La seconde partie montre que $\mathcal{W}_\infty$ est lui-même un localisateur fondamental, ce que l'on est en droit d'attendre aux vues des motivations de Grothendieck dans l'élaboration de la notion de localisateur fondamental.

Localisateurs fondamentaux

Dans ce chapitre, on se focalise sur la notion de *localisateur fondamental*, abstraction de l'ensemble $\mathcal{W}_\infty$ des équivalences faibles catégoriques. Après quelques rappels, on en donne d'abord une définition axiomatique précise, l'axiome clef étant une version relative du théorème A de Quillen ([Qui73]). On démontre ensuite certains résultats découlant directement des propriétés combinatoires des localisateurs fondamentaux. En particulier, on verra que les équivalences de catégories sont toujours éléments d'un localisateur fondamental.

On prouve ensuite le résultat suivant, étonnamment non trivial : un localisateur fondamental contient un foncteur $u: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ si et seulement si il contient son foncteur opposé $u^\circ: \mathcal{A}^\circ \rightarrow \mathcal{B}^\circ$. Pour ce faire, on introduit les outils nécessaires à la preuve : les notions de catégorie fibrée et op-fibrée, et la construction de Grothendieck sur un diagramme de Cat. Cette dernière construction fournit des foncteurs entre catégories (op-)fibrées, qu'on sait facilement être membres d'un localisateur fondamental ou non en observant leur comportement « local » (plus précisément, fibres à fibres).

1.1 Axiomatique

Cette première section est pour la plus grande partie une paraphrase avouée de l'article [Cis04] et trouve sa justification dans l'offre qu'elle fait d'une lecture continue, évitant ainsi au lecteur de se reporter sans arrêt à l'article de Cisinski.

Étant donné un ensemble $\mathcal{W} \subseteq \text{Mor Cat}$, on appelle *$\mathcal{W}$ -équivalences faibles* (ou plus simplement *équivalences faibles*) les éléments de $\mathcal{W}$.

Définition 1.1.1 (Saturation faible). Une partie $\mathcal{W} \subseteq \text{Mor Cat}$ est dite *faiblement saturée* si elle vérifie les trois conditions suivantes :

FS1 les identités sont dans $\mathcal{W}$,

FS2 la condition 2-sur-3 : si f, g, h forment un triangle commutatif de Cat

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ h \downarrow & \swarrow g & \\ & Z & \end{array}$$

et si deux des trois flèches f, g, h sont dans $\mathcal{W}$, alors il en va de même de la troisième,

FS3 si $r: Y \rightarrow X$ est une rétraction de $i: X \rightarrow Y$ (i.e. $ri = 1_X$), et si $ir \in \mathcal{W}$, alors $r \in \mathcal{W}$.

Remarquons que les isomorphismes sont dans toute partie faiblement saturée : si g inverse f , c'en est notamment une rétraction et $fg \in \mathcal{W}$ en tant qu'identité.

Rappelons que pour toute catégorie $\mathcal{C}$ et tout objet c de $\mathcal{C}$, on a une catégorie $\mathcal{C}_{/c}$ des *objets de $\mathcal{C}$ au-dessus de c* dont les objets sont les couples $(c', f: c' \rightarrow c)$ et les flèches $(c', f) \rightarrow (c'', g)$ sont les morphismes $h: c' \rightarrow c''$ faisant commuter le triangle

$$\begin{array}{ccc} c' & \xrightarrow{h} & c'' \\ f \downarrow & \searrow g & \\ c & & \end{array}$$

Dualement, on a une catégorie ${}_c\mathcal{C}$ des *objets de $\mathcal{C}$ au-dessous de c* définie comme $(\mathcal{C}^{\circ}/c)^{\circ}$, où $-^{\circ}: \text{Cat} \rightarrow \text{Cat}$ est le foncteur *catégorie opposée*. Ces deux catégories sont toutes deux équipées de foncteurs d'oubli

$$\mathcal{C}_{/c} \rightarrow \mathcal{C}, \quad {}_c\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C},$$

définis respectivement par $(c', c' \rightarrow c) \mapsto c'$ et $(c', c \rightarrow c') \mapsto c'$.

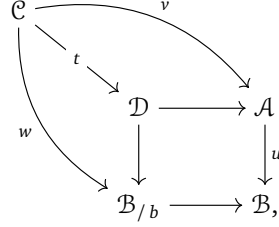
Considérons maintenant un foncteur $u: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ et un objet b de $\mathcal{B}$. On définit la catégorie $\mathcal{A}_{/b}$ au-dessus de $\mathcal{B}_{/b}$ comme le produit fibré (dans la catégorie complète Cat) de u le long du foncteur du foncteur d'oubli $\mathcal{B}_{/b} \rightarrow \mathcal{B}$, i.e. faisant de

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_{/b} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ u_{/b} \downarrow & & \downarrow u \\ \mathcal{B}_{/b} & \longrightarrow & \mathcal{B} \end{array}$$

un carré cartésien. Il est assez facile de décrire $\mathcal{A}_{/b}$ comme la catégorie dont les objets sont les couples (a, f) pour $a \in \text{Ob } \mathcal{A}$ et $f: u(a) \rightarrow b \in \text{Mor } \mathcal{B}$, et dont les morphismes $(a, f) \rightarrow (a', g)$ sont les morphismes $f: a \rightarrow a'$ de $\mathcal{A}$ d'image par u dans $\text{Hom}_{\mathcal{B}_{/b}}((u(a), f), (u(a'), g))$. En effet, notons $\mathcal{D}$ la catégorie tout juste décrite ; alors pour tous foncteurs $v: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ et $w: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}_{/b}$ faisant commuter

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{v} & \mathcal{A} \\ w \downarrow & & \downarrow u \\ \mathcal{B}_{/b} & \longrightarrow & \mathcal{B}, \end{array}$$

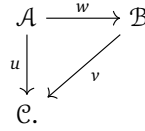
on a un unique foncteur $t: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ faisant commuter



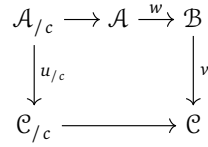
à savoir le foncteur défini sur les objets $c \in \text{Ob } \mathcal{C}$ par $t(c) = (v(c), w_1(c))$ où $w(c) = (w_0(c), w_1(c))$, et sur les morphismes $f: c \rightarrow c'$ de $\mathcal{C}$ par $t(f) = v(f)$. Dans cette description de $\mathcal{A}_{/b}$, le foncteur induit $u_{/b}: \mathcal{A}_{/b} \rightarrow \mathcal{B}_{/b}$ s'écrit comme $(a, f) \mapsto (u(a), f)$.

Dualement, un foncteur $u: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ définit pour tout $b \in \text{Ob } \mathcal{B}$ une catégorie $b \backslash \mathcal{A}$, isomorphe à la catégorie $(\mathcal{A}^\circ_{/b})^\circ$ associée à $u^\circ: \mathcal{A}^\circ \rightarrow \mathcal{B}^\circ$.

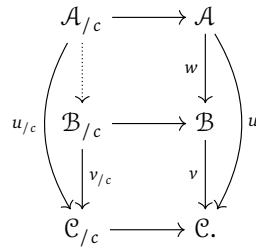
Soient maintenant deux catégories $u: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ et $v: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ au-dessus de $\mathcal{C}$, et $w: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur au-dessus de $\mathcal{C}$, i.e. faisant commuter



Pour tout objet c de $\mathcal{C}$, le diagramme



se factorise par propriété universel du produit fibré en



La flèche ainsi induite sera noté $w_{/c}: \mathcal{A}_{/c} \rightarrow \mathcal{B}_{/c}$. Informellement, $w_{/c}$ est le comportement *local* au-dessus de c du foncteur *global* w .

REMARQUE 1.1.2. Les définitions de $\mathcal{C}_{/c}$, $\mathcal{A}_{/c}$ et $w_{/c}$ ci-dessus sont en fait des cas particuliers de la notion de *catégorie comma*. Pour deux foncteurs $u: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ et $v: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ avec même codomaine, on définit la catégorie $(u \downarrow v)$ comme la catégorie dont

- les objets sont les triplets $(a, b, f : u(a) \rightarrow v(b))$,
- les morphismes $(a, b, f) \rightarrow (a', b', f')$ sont les carrés commutatifs dans $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc} u(a) & \xrightarrow{u(k)} & u(a') \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ v(b) & \xrightarrow{v(\ell)} & v(b') \end{array} \quad (k \in \text{Mor } \mathcal{A}, \ell \in \text{Mor } \mathcal{B}),$$

- la composition est la concaténation des carrés commutatifs.

Ainsi, en notant par abus $c : e \rightarrow \mathcal{C}$ le foncteur de valeur $c \in \text{Ob } \mathcal{C}$, on a les isomorphismes de catégories suivant :

- $\mathcal{C}_{/c} \simeq (\mathbf{1}_e \downarrow c)$,
- ${}_c\mathcal{C} \simeq (c \downarrow \mathbf{1}_e)$.

Et pour tout $u : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$, on a les isomorphismes de catégories suivant :

- $\mathcal{A}_{/c} \simeq (u \downarrow c)$,
- ${}_c\mathcal{A} \simeq (c \downarrow u)$.

Notamment, si le foncteur u sous-jacent à la notation $\mathcal{A}_{/c}$ est ambigu, on n'hésitera pas à utiliser la notation $(u \downarrow c)$.

Définition 1.1.3. Soit $\mathcal{W} \subseteq \text{Mor Cat}$. Une foncteur $u : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ au-dessus de $\mathcal{C}$ est dit *$\mathcal{W}$ -asphérique au-dessus de $\mathcal{C}$* (ou plus simplement *asphérique au-dessus de $\mathcal{C}$*) si pour tout objet c de $\mathcal{C}$ le foncteur induit $u_{/c} : \mathcal{A}_{/c} \rightarrow \mathcal{B}_{/c}$ est dans $\mathcal{W}$.

Reprenons le vocabulaire local/global ci-dessus : un foncteur (global) au-dessus de $\mathcal{C}$ est asphérique au-dessus de $\mathcal{C}$ s'il est localement une équivalence faible.

TERMINOLOGIE 1.1.4. Tout foncteur $u : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ est en particulier un foncteur au-dessus de $\mathcal{B}$ entre les catégories $u : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ et $\mathbf{1}_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ au-dessus de $\mathcal{B}$. On dit alors que u est *$\mathcal{W}$ -asphérique* s'il l'est au-dessus de $\mathcal{B}$.

Rappelons ici que Cat , étant complète, admet un objet final e . On peut facilement le décrire comme la catégorie avec un unique objet et un unique morphisme (l'identité de cet objet). On dira que la catégorie $\mathcal{A}$ est *$\mathcal{W}$ -asphérique* si l'unique foncteur $\mathcal{A} \rightarrow e$ l'est au sens précédent. Si $\mathcal{W}$ est stable par isomorphisme (par exemple si $\mathcal{W}$ est faiblement saturée), cela revient à $\mathcal{A} \rightarrow e \in \mathcal{W}$.

Définition 1.1.5 (Localisateur fondamental). Une partie $\mathcal{W} \subseteq \text{Mor Cat}$ est un *localisateur fondamental* si elle respecte les trois conditions suivantes :

- LF1** $\mathcal{W}$ est faiblement saturée,
- LF2** toute petite catégorie ayant un objet final est $\mathcal{W}$ -asphérique,
- LF3** tout foncteur $\mathcal{W}$ -asphérique au-dessus d'une petite catégorie est dans $\mathcal{W}$.

L'axiome **LF3** est primordiale comme cela apparaîtra par la suite. C'est la version relative du théorème A de Quillen annoncée, motivation originale de Grothendieck dans l'élaboration de la notion de localisateur fondamental.

EXEMPLE(S) 1.1.6. (i) La partie $\mathcal{W} = \text{Mor Cat}$ est un localisateur fondamental, qu'on dira *trivial*.

- (ii) La partie $\mathcal{W}$ constituée de tous les foncteurs $u: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ avec $\mathcal{A} \neq \emptyset$ et du foncteur identité $1_\emptyset$ est un localisateur fondamental. Ce localisateur fondamental est dit *grossier*. On peut montrer que tout localisateur fondamental contenant le localisateur grossier est soit groissier soit trivial (voir [Mal05]).
- (iii) Une partie importante de ce document est consacrée à montrer que la partie $\mathcal{W}_\infty$, constituée des foncteurs dont la réalisation topologique est une équivalence homotopique faible, est un localisateur fondamental (cf. théorème 3.2.8).

1.2 Quelques propriétés

Afin d'alléger les énoncés, on fixe pour cette section un localisateur fondamental $\mathcal{W}$. On rappelle la terminologie introduite en début de chapitre : les éléments de $\mathcal{W}$ sont nommés équivalences faibles, ce qui est tout naturel étant données les motivations de Grothendieck expliquées en introduction. Rappelons également que $\mathbf{Cat}$ est complète et cocomplète.

Proposition 1.2.1. *Soit I un petit ensemble. Soit $u_i: \mathcal{A}_i \rightarrow \mathcal{B}_i$ une famille d'équivalences faibles indexée par I . Alors le foncteur induit*

$$\coprod_{i \in I} \mathcal{A}_i \rightarrow \coprod_{i \in I} \mathcal{B}_i$$

est également une équivalence faible.

Preuve. Notons encore I la petite catégorie discrète dont l'ensemble des objets est I . Alors pour chaque $i \in I$, on a des foncteurs $c_i: \mathcal{A}_i \rightarrow I$ et $c'_i: \mathcal{B}_i \rightarrow I$ constants de valeurs i ; si bien que commute le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_i & \xrightarrow{u_i} & \mathcal{B}_i \\ c_i \downarrow & \swarrow c'_i & \\ I & & \end{array}$$

Par la propriété universelle du coproduit, on obtient deux foncteurs $\coprod_i \mathcal{A}_i \rightarrow I$ et $\coprod_i \mathcal{B}_i \rightarrow I$ faisant commuter

$$\begin{array}{ccc} \coprod_i \mathcal{A}_i & \xrightarrow{\coprod_i u_i} & \coprod_i \mathcal{B}_i \\ \downarrow & \swarrow & \\ I & & \end{array}$$

Par **LF3**, il suffit de vérifier l'asphéricité de $\coprod_i u_i$ au-dessus de I . Mais I étant discrète, pour tout foncteur $v: \mathcal{C} \rightarrow I$ et tout $i \in I$, la catégorie $\mathcal{C}_{/i}$ s'identifie à la fibre en i de v (i.e. la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ composée des objet de $\mathcal{C}$ s'envoyant sur i par v), et le foncteur $v_{/i}$ s'identifie à l'unique foncteur $\mathcal{C}_{/i} \rightarrow e$. Aussi a-t-on via cette identification $(\coprod_j u_j)_{/i} = u_i$ pour tout $i \in I$, ce qui implique l'asphéricité de $\coprod_i u_i$. $\square$

Proposition 1.2.2. Soient $u: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ et $v: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ des équivalences faibles. Alors le foncteur induit

$$\mathcal{A} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B} \times \mathcal{D}$$

est également un équivalence faible.

Preuve. Le foncteur $u \times v: \mathcal{A} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B} \times \mathcal{D}$ est induit par la propriété universelle du produit $\mathcal{B} \times \mathcal{D}$ appliquée aux foncteurs

$$\mathcal{A} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{u} \mathcal{B}, \quad \mathcal{A} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \xrightarrow{v} \mathcal{D},$$

donc est isomorphe au foncteur composé

$$\mathcal{A} \times \mathcal{C} \xrightarrow{u \times 1_{\mathcal{C}}} \mathcal{B} \times \mathcal{C} \xrightarrow{1_{\mathcal{B}} \times v} \mathcal{B} \times \mathcal{D}.$$

Les équivalences faibles étant stable par composition ($\mathcal{W}$ a la propriété **FS2**), il suffit de montrer le cas particulier où $\mathcal{C} = \mathcal{D}$ et $v = 1_{\mathcal{C}}$: c'est le contenu du lemme suivant. $\square$

Lemme 1.2.3. Si $u: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ est une équivalence faible, alors il en est de même de $u \times 1_{\mathcal{C}}: \mathcal{A} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B} \times \mathcal{C}$.

Preuve. Les projections $\mathcal{A} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ et $\mathcal{B} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ font de $u \times 1_{\mathcal{C}}$ un foncteur au-dessus de $\mathcal{C}$. Aussi suffit-il de montrer qu'il est asphérique au-dessus de $\mathcal{C}$. Or, pour c objet de $\mathcal{C}$, on a un isomorphisme (dans la catégorie des flèches de $\mathbf{Cat}$) entre $(u \times 1_{\mathcal{C}})_{/c}: (\mathcal{A} \times \mathcal{C})_{/c} \rightarrow (\mathcal{B} \times \mathcal{C})_{/c}$ et $u \times 1_{\mathcal{C}/c}: \mathcal{A} \times \mathcal{C}_{/c} \rightarrow \mathcal{B} \times \mathcal{C}_{/c}$. On montre donc que ce dernier est une équivalence faible. Le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \times \mathcal{C}_{/c} & \xrightarrow{u \times 1_{\mathcal{C}/c}} & \mathcal{B} \times \mathcal{C}_{/c} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{A} & \xrightarrow{u} & \mathcal{B} \end{array}$$

et la propriété **FS2** montrent qu'il suffit alors d'avoir les projections verticales dans $\mathcal{W}$. C'est le lemme suivant. $\square$

Lemme 1.2.4. Si $\mathcal{A}$ est une petite catégorie et $\mathcal{C}$ une petite catégorie avec objet final, alors $\mathcal{A} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ est asphérique (en particulier est une équivalence faible).

Preuve. Soit a un objet de $\mathcal{A}$. La projection $\mathcal{A} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ induit un morphisme $(\mathcal{A} \times \mathcal{C})_{/a} \rightarrow \mathcal{A}_{/a}$ isomorphe (dans la catégorie des flèches de $\mathbf{Cat}$) à la projection $\mathcal{A}_{/a} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}_{/a}$. Or $\mathcal{A}_{/a}$ a un objet final (à savoir $(a, 1_a)$), ainsi que $\mathcal{A}_{/a} \times \mathcal{C}$ (à savoir $((a, 1_a), e_{\mathcal{C}})$ pour $e_{\mathcal{C}}$ l'objet final de $\mathcal{C}$). Donc $\mathcal{A}_{/a} \times \mathcal{C} \rightarrow e$ est asphérique donc une équivalence faible, et de même pour $\mathcal{A}_{/a} \rightarrow e$. La commutativité (triviale) de

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_{/a} \times \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{A}_{/a} \\ \downarrow & \swarrow & \\ e & & \end{array}$$

associé à la propriété **FS2** de $\mathcal{W}$ assure que $\mathcal{A}_{/a} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}_{/a}$ est une équivalence faible. $\square$

Les résultats suivants assurent que notre notion de localisateur fondamental est raisonnable : quelle que soit la notion généralisée d'équivalences faibles, les équivalences de catégories se doivent d'en être en particulier !

Proposition 1.2.5. *Si α est une transformation naturelle de $u: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ vers $v: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, alors u est une équivalence faible si et seulement si v en est une.*

Preuve. Notons $[1]$ la catégorie associée à l'ensemble ordonné $\{0 < 1\}$. Alors la transformation naturelle α induit un foncteur $\tilde{\alpha}: \mathcal{A} \times [1] \rightarrow \mathcal{B}$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A} & \xleftarrow{i_0} & \mathcal{A} \times [1] & \xleftarrow{i_1} & \mathcal{A} \\ & \searrow u & \downarrow \tilde{\alpha} & \swarrow v & \\ & & \mathcal{B} & & \end{array}$$

où i_0 et i_1 sont respectivement $a \mapsto (a, 0)$ et $a \mapsto (a, 1)$. La propriété **FS2** montre que pour conclure il suffit de prouver que i_0 et i_1 sont des équivalences faibles. Or $[1]$ a un objet final (à savoir 1), donc le lemme 1.2.4 assure que la projection $p: \mathcal{A} \times [1] \rightarrow \mathcal{A}$ est asphérique, donc une équivalence faible. La commutativité des deux triangles

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xleftarrow{i_0} & \mathcal{A} \times [1] \\ \downarrow \mathbf{1}_{\mathcal{A}} & & \searrow p \\ \mathcal{A} & & \mathcal{A} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{A} \times [1] & \xleftarrow{i_1} & \mathcal{A} \\ \searrow p & & \downarrow \mathbf{1}_{\mathcal{A}} \\ \mathcal{A} & & \mathcal{A} \end{array}$$

assure (encore par **FS2**) que i_0 et i_1 sont des équivalences faibles. $\square$

Proposition 1.2.6. *Un adjoint à gauche est une équivalence faible. Un adjoint à droite est une équivalence faible. En particulier, une équivalence de catégories est une équivalence faible.*

Preuve. Si $u: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ admet un adjoint à droite $v: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$, l'unité $\eta: \mathbf{1}_{\mathcal{A}} \rightarrow vu$ est une transformation naturelle de l'équivalence faible $\mathbf{1}_{\mathcal{A}}$ vers vu . En vertu de la proposition 1.2.5, vu est une équivalence faible.

On va maintenant montrer que u est asphérique. L'adjonction donne par définition une bijection

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(u(a), b) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(a, v(b))$$

naturelle en $(a, b) \in \mathrm{Ob} \mathcal{A} \times \mathrm{Ob} \mathcal{B}$. Étant donné un objet b de $\mathcal{B}$, on a ainsi un isomorphisme de catégorie $\mathcal{A}_{/b} \simeq \mathcal{A}_{/v(b)}$. Mais cette dernière catégorie admet l'objet final $\mathbf{1}_{v(b)}$, donc est asphérique. Par conséquent $\mathcal{A}_{/b}$ est asphérique. De plus, $\mathcal{B}_{/b}$ admet un objet final donc est asphérique. Considérant le triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_{/b} & \xrightarrow{u_{/b}} & \mathcal{B}_{/b} \\ \downarrow & \swarrow & \\ e, & & \end{array}$$

la propriété **FS2** conclut que $u_{/b} \in \mathcal{W}$. Ce qui prouve l'asphéricité de u , donc son appartenance à $\mathcal{W}$.

Enfin, comme u et vu sont des équivalences faibles, **FS2** s'applique au triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ \downarrow vu & \searrow v & \\ A & & \end{array}$$

pour donner $v \in \mathcal{W}$. $\square$

La preuve semble très *asymétrique* : l'adjoint à gauche est prouvé asphérique « à la main », et on en déduit que l'adjoint à droite est (a priori seulement) une équivalence faible. De même, on utilise l'unité de l'adjonction mais la counité n'apparaît nulle part. On verra que cette asymétrie n'est ici qu'ad hoc et qu'elle ne relève pas d'une asymétrie de $\mathcal{W}$. Un premier aperçu en est donné par le corollaire suivant, proposition duale de **LF2**.

Corollaire 1.2.7. *Toute petite catégorie admettant un objet initial est asphérique.*

Preuve. Soit $\mathcal{A}$ une petite catégorie avec objet initial. Le foncteur $e \rightarrow \mathcal{A}$ envoyant l'unique objet de e sur l'objet initial $\emptyset$ de $\mathcal{A}$ est un adjoint à gauche de $\mathcal{A} \rightarrow e$. $\square$

1.3 Autodualité

Cette section est destinée à prouver le résultat suivant.

Proposition 1.3.1. *Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental. Un foncteur $u: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ est une $\mathcal{W}$ -équivalence faible si et seulement si le foncteur opposé $u^\circ: \mathcal{A}^\circ \rightarrow \mathcal{B}^\circ$ en est une.*

Cela nous permettra de dualiser tous nos énoncés concernant les équivalences faibles d'un localisateur fondamental. Étonnamment, ce résultat n'a rien de trivial et demande des outils techniques que nous introduisons maintenant.

Catégorie fibrées et op-fibrées. Le premier de ces outils est la notion de fibration et op-fibration de Grothendieck.

Définition 1.3.2 (Morphisme cartésien). Soit $u: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur. Une flèche $f: a \rightarrow a'$ de $\mathcal{A}$ est dite *cartésienne*¹ *relativement à u* si pour toute flèche $g: a'' \rightarrow a'$ et tout triangle commutatif de $\mathcal{B}$

$$\begin{array}{ccc} u(a'') & \xrightarrow{u(g)} & u(a') \\ \downarrow k & \searrow & \downarrow \\ u(a) & \xrightarrow{u(f)} & u(a') \end{array}$$

il existe une unique flèche $h: a'' \rightarrow a$ de $\mathcal{A}$ telle que $u(h) = k$ et faisant commuter le triangle de $\mathcal{A}$

$$\begin{array}{ccc} a'' & \xrightarrow{g} & a' \\ \downarrow h & \searrow & \downarrow \\ a & \xrightarrow{f} & a' \end{array}$$

1. La notion de morphisme cartésien ici définie diffère de la notion initialement introduite dans [GR71]. La notion de catégorie fibrée qui en découle sera néanmoins la notion usuelle.

Définition 1.3.3 (Morphisme cocartésien). Soit $u: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur. Une flèche $f: a \rightarrow a'$ de $\mathcal{A}$ est *cocartésienne relativement à u* si la flèche $f^\circ: a' \rightarrow a$ de $\mathcal{A}^\circ$ est cartésienne relativement à u° .

Définition 1.3.4 (Fibration de Grothendieck). Un foncteur $u: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ est une *fibration de Grothendieck* (on dit aussi $\mathcal{A}$ est une *catégorie fibrée au-dessus de $\mathcal{B}$*) si pour toute flèche $f: b \rightarrow b'$ de $\mathcal{B}$ et tout objet a' de $\mathcal{A}$ tel que $u(a') = b'$, il existe un morphisme cartésien $\tilde{f}: a \rightarrow a'$ de $\mathcal{A}$ tel que $u(\tilde{f}) = f$.

Définition 1.3.5 (Op-fibration de Grothendieck). Un foncteur $u: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ est une *op-fibration de Grothendieck* (on dit aussi $\mathcal{A}$ est une *catégorie op-fibrée au-dessus de $\mathcal{B}$*) si le foncteur opposé $u^\circ: \mathcal{A}^\circ \rightarrow \mathcal{B}^\circ$ est une fibration de Grothendieck.

Étant donné une fibration ou op-fibration de Grothendieck $u: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, on appelle *fibre en $b \in \text{Ob } \mathcal{B}$ de u* la sous-catégorie $\mathcal{A}_b$ de $\mathcal{A}$ composée des objets a de $\mathcal{A}$ tel que $u(a) = b$ et des morphismes $f: a \rightarrow a'$ tel que $u(f) = \mathbf{1}_b$.

EXEMPLE(S) 1.3.6. Pour deux petites catégories $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ avec $\mathcal{B}$ non vide, la projection canonique

$$p: \mathcal{A} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$$

est une op-fibration. En effet, si $f: a \rightarrow a'$ est une flèche de $\mathcal{A}$ et $b \in \text{Ob } \mathcal{B}$, la flèche $(f, \mathbf{1}_b): (a, b) \rightarrow (a', b)$ est cocartésienne : étant donné une flèche $(g, i): (a, b) \rightarrow (a'', b'')$ de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ et un triangle commutatif de $\mathcal{A}$

$$\begin{array}{ccc} & & a'' \\ & \nearrow g & \\ a & \xrightarrow{f} & a' \end{array}$$

la flèche $(h, i): (a', b) \rightarrow (a'', b'')$ s'inscrit dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & (a'', b'') \\ & \nearrow (g, i) & \\ (a, b) & \xrightarrow{(f, \mathbf{1}_b)} & (a', b) \end{array} \xrightarrow{p} \begin{array}{ccc} & & a'' \\ & \nearrow g & \\ a & \xrightarrow{f} & a' \end{array}$$

Proposition 1.3.7. La composée de deux fibrations est une fibration. La composée de deux op-fibrations est une op-fibration.

Preuve. C'est immédiat. □

Lemme 1.3.8. Soit $u: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ une op-fibration de Grothendieck. Pour tout $b \in \text{Ob } \mathcal{B}$, le foncteur

$$\mathcal{A}_b \rightarrow \mathcal{A}_{/b}, \quad a \mapsto (a, \mathbf{1}_b)$$

admet un adjoint à gauche.

Preuve. Notons F le foncteur de l'énoncé et construisons-lui un adjoint à gauche comme suit. Si $(a, f: u(a) \rightarrow b)$ est un objet de $\mathcal{A}_{/b}$, alors, u étant une op-fibration, il existe un objet a' de $\mathcal{A}$ et un morphisme cocartésien $\tilde{f}: a \rightarrow a'$ tel que $u(\tilde{f}) = f$. Notons $G(a, f) = a'$. Cela définit une application $G: \text{Ob } \mathcal{A}_{/b} \rightarrow \text{Ob } \mathcal{A}_b$ que l'on va prolonger fonctoriellement aux flèches.

Soit $\tilde{h}: (a, f: u(a) \rightarrow b) \rightarrow (a', g: u(a') \rightarrow b)$ une flèche de $\mathcal{A}_{/b}$, c'est-à-dire une flèche $\tilde{h}: a \rightarrow a'$ de $\mathcal{A}$ faisant commuter

$$\begin{array}{ccc} u(a) & \xrightarrow{u(\tilde{h})} & u(a') \\ f \downarrow & \swarrow g & \\ b. & & \end{array}$$

Comme $\tilde{f}$ est cocartésienne, il existe une unique flèche $G(\tilde{h}): G(a, f) \rightarrow G(a', g)$ de $\mathcal{A}$ faisant commuter

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{\tilde{h}} & a' \xrightarrow{\tilde{g}} G(a', g) \\ \tilde{f} \searrow & \nearrow G(\tilde{h}) & \\ G(a, f) & & \end{array} \xrightarrow{u} \begin{array}{ccc} u(a) & \xrightarrow{u(\tilde{h})} & u(a') \xrightarrow{g} b \\ f \searrow & \nearrow 1_b & \\ b. & & \end{array}$$

Cela étend G en une application $\text{Mor } \mathcal{A}_{/b} \rightarrow \text{Mor } \mathcal{A}_b$. L'unicité de $G(\tilde{h})$ implique facilement la functorialité de l'application G ainsi défini.

Il reste à prouver que G est un adjoint à gauche de F . Pour tout $a \in \text{Ob } \mathcal{A}_b$ et tout $(a', g: u(a') \rightarrow b) \in \text{Ob } \mathcal{A}_{/b}$, l'application

$$\iota_{a, (a', g)}: \text{Hom}_{\mathcal{A}_b}(G(a', g), a) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}_{/b}}((a', g), (a, 1_b)),$$

associant à $\tilde{h}: G(a', g) \rightarrow a$ de $\mathcal{A}_b$ la flèche composée

$$a' \xrightarrow{\tilde{g}} G(a', g) \xrightarrow{\tilde{h}} a$$

faisant commuter

$$\begin{array}{ccc} u(a') & \xrightarrow{u(\tilde{h}\tilde{g})} & b \\ g \downarrow & \swarrow 1_b & \\ b, & & \end{array}$$

est une bijection. En effet, pour une flèche $\tilde{\ell}: a' \rightarrow a$ satisfaisant $u(\tilde{\ell}) = g$, le caractère cocartésien de $\tilde{g}$ assure qu'il existe une unique flèche $\tilde{h}$ comme dans

$$\begin{array}{ccc} a' & \xrightarrow{\tilde{\ell}} & a \\ \tilde{g} \searrow & \nearrow \tilde{h} & \\ G(a', g) & & \end{array} \xrightarrow{u} \begin{array}{ccc} u(a') & \xrightarrow{u(\tilde{\ell})} & b \\ g \searrow & \nearrow 1_b & \\ b. & & \end{array}$$

La naturalité de $\iota_{a, (a', g)}$ en $a \in \text{Ob } \mathcal{A}_b$ et $(a', g) \in \text{Ob } \mathcal{A}_{/b}$ est immédiate. $\square$

Ce dernier lemme prouve le résultat bien pratique suivant : un morphisme asphérique entre catégories op-fibrées se détecte fibres à fibres.

Proposition 1.3.9. *Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental. Soient $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}, \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ deux op-fibrations de Grothendieck, et $u: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur au-dessus de $\mathcal{C}$. Si pour tout $c \in \text{Ob } \mathcal{C}$, le foncteur induit $\mathcal{A}_c \rightarrow \mathcal{B}_c$ est une équivalence faible, alors le foncteur u est asphérique au-dessus de $\mathcal{C}$.*

Preuve. Pour tout $c \in \text{Ob } \mathcal{C}$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_c & \longrightarrow & \mathcal{B}_c \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{A}_{/c} & \longrightarrow & \mathcal{B}_{/c} \end{array}$$

commute. La flèche du haut est par hypothèse dans $\mathcal{W}$; les deux flèches verticales également, puisque le lemme 1.3.8 leur assure un adjoint à gauche ; la propriété **FS2** conclut. $\square$

REMARQUE 1.3.10. Un cas particulier de la proposition précédente est la suivante : pour qu'une op-fibration soit asphérique, il suffit que ses fibres le soient.

En effet, si $u: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ est une op-fibration, on applique la proposition au foncteur u entre les op-fibrations $u: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ et $\mathbf{1}_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ au-dessus de $\mathcal{C}$. Par hypothèse, chacune des fibres $\mathcal{A}_c$ est asphérique : $\mathcal{A}_c \rightarrow e \in \mathcal{W}$. De plus, la fibre en c de $\mathbf{1}_{\mathcal{C}}$ est la catégorie ponctuelle $\mathcal{C}_c \simeq e$. Donc la flèche induit entre les fibres

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_c & \longrightarrow & \mathcal{C}_c \\ & \searrow & \downarrow \mathbb{R} \\ & & e \end{array}$$

est une équivalence faible par **FS2**.

Intégration de préfaisceaux. Étant donné un foncteur $F: \mathcal{I} \rightarrow \text{Cat}$ d'une petite catégorie $\mathcal{I}$ à valeurs dans Cat , on va construire une op-fibration canonique au-dessus de $\mathcal{I}$ de fibres $F(i), i \in \text{Ob } \mathcal{I}$.

Définition 1.3.11 (Construction de Grothendieck). Soit un foncteur $F: \mathcal{I} \rightarrow \text{Cat}$. La construction de Grothendieck sur F est la catégorie $\int_{\mathcal{I}} F$ (parfois notée seulement $\int F$)

- d'**objets** les couples (i, a) avec $i \in \text{Ob } \mathcal{I}$ et $a \in \text{Ob } F(i)$,
- de **morphismes** $(i, a) \rightarrow (i', a')$ les couples $(k: i \rightarrow i', f: F(k)(a) \rightarrow a')$,
- où la **composition** de $(k, f): (i, a) \rightarrow (i', a')$ par $(k', f'): (i', a') \rightarrow (i'', a'')$ est définie comme $(k', f') \circ (k, f) = (kk', f' \circ F(k')(f))$:

$$i \xrightarrow{k} i' \xrightarrow{k'} i'',$$

$$F(k'k)(a) \xrightarrow{F(k')(f)} F(k')(a') \xrightarrow{f'} a''.$$

REMARQUE 1.3.12. La construction de Grothendieck est en fait une généralisation du produit semi-direct de groupes. En effet, étant donnés deux groupes H et K , on pose $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ les catégories associées ayant un unique objet, respectivement $\star_H$ et $\star_K$, et ayant respectivement H et K comme monoïde d'endomorphismes de $\star_H$ et $\star_K$. Un morphisme de groupes $\varphi: K \rightarrow \text{Aut}(H)$ induit un foncteur

$$F_{\varphi}: \mathcal{K} \rightarrow \text{Cat}, \quad \star_K \mapsto \mathcal{H}, \quad k \mapsto \varphi(k).$$

La construction de Grothendieck $\int_{\mathcal{K}} F_\varphi$ est alors la catégorie avec un unique objet $\star = (\star_K, \star_H)$, et de morphismes $\star \rightarrow \star$ les couples $(k, h) \in K \times H$. De plus, la composition γ est définie comme $(k', h')(k, h) = (kk', \varphi(k')(h)h')$. C'est-à-dire que $\int_{\mathcal{K}} F_\varphi$ est la catégorie associée au groupe $H \rtimes_\varphi K$.

La construction de Grothendieck $\int_{\mathcal{J}} F$ d'un foncteur $F: \mathcal{J} \rightarrow \text{Cat}$ est équipée d'un foncteur *d'oubli*

$$\vartheta_F: \int_{\mathcal{J}} F \rightarrow \mathcal{J}, \quad (i, a) \mapsto i, \quad (k, f) \mapsto k.$$

Comme annoncé, ce foncteur ϑ_F est une op-fibration. En effet, pour toute flèche $k: i \rightarrow i'$ de $\mathcal{J}$ et tout objet (i, a) de $\int F$, la flèche $(k, \mathbf{1}_{F(k)(a)}): (i, a) \rightarrow (i', F(k)(a))$ est cocartésienne : soient $(\ell, g): (i, a) \rightarrow (i'', a'')$ une flèche de $\int F$ et $m: i' \rightarrow i''$ une flèche de $\mathcal{J}$ faisant commuter

$$\begin{array}{ccc} & & i'' \\ & \nearrow g & \uparrow m \\ i & \xrightarrow{k} & i' \end{array};$$

la flèche $(m, g): (i, a) \rightarrow (i'', a'')$ est alors l'unique flèche à s'insérer dans

$$\begin{array}{ccc} & (i'', a'') & \\ (\ell, g) \nearrow & \uparrow (m, g) & \\ (i, a) \xrightarrow{(k, \mathbf{1}_{F(k)(a)})} & (i', F(k)(a)) & \end{array} \xrightarrow{\vartheta_F} \begin{array}{ccc} & i'' & \\ \ell \nearrow & \uparrow m & \\ i & \xrightarrow{k} & i' \end{array}.$$

De plus, si $\mu: F \rightarrow G$ est une transformation naturelle de $F: \mathcal{J} \rightarrow \text{Cat}$ vers $G: \mathcal{J} \rightarrow \text{Cat}$, le foncteur

$$\int_{\mathcal{J}} \mu: \int_{\mathcal{J}} F \rightarrow \int_{\mathcal{J}} G, \quad (i, a) \mapsto (i, \mu(i)(a)), \quad (k, f) \mapsto (k, \mu(i')(f))$$

est un foncteur au-dessus de $\mathcal{J}$, i.e. faisant commuter

$$\begin{array}{ccc} \int F & \xrightarrow{\int \mu} & \int G \\ \vartheta_F \downarrow & \searrow \vartheta_G & \\ \mathcal{J} & & \end{array}.$$

Ceci définit un foncteur $\int_{\mathcal{J}}: \text{Cat}^{\mathcal{J}} \rightarrow \text{Cat}_{/\mathcal{J}}$ à valeur dans les objets op-fibrés de $\text{Cat}_{/\mathcal{J}}$. On fera l'abus de noter encore $\int_{\mathcal{J}}$ le foncteur composé

$$\text{Cat}^{\mathcal{J}} \xrightarrow{\int_{\mathcal{J}}} \text{Cat}_{/\mathcal{J}} \longrightarrow \text{Cat}.$$

Revenons à notre étude des localisateurs fondamentaux. Si $\mathcal{W}$ est un localisateur fondamental, on appelle *$\mathcal{W}$ -équivalence faible étagée* (ou plus simplement *équivalence faible étagée*) toute flèche μ de $\text{Cat}^{\mathcal{J}}$ qui est une $\mathcal{W}$ -équivalence faible point

par point, i.e. telle que $\mu(i) \in \mathcal{W}$ pour tout $i \in \text{Ob } \mathcal{J}$. On note $\mathcal{W}_{\mathcal{J}}$ le sous-ensemble de $\text{Mor Cat}^{\mathcal{J}}$ formé des équivalences faibles étagées.

Proposition 1.3.13. *Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental. Le foncteur d'intégration $\int_{\mathcal{J}} : \text{Cat}^{\mathcal{J}} \rightarrow \text{Cat}$ envoie les équivalences faibles étagées sur des équivalences faibles.*

Preuve. Soit $\mu : F \rightarrow G$ une transformation naturelle entre $F, G : \mathcal{J} \Rightarrow \text{Cat}$. Le foncteur $\int \mu$ est un foncteur au-dessus de $\mathcal{J}$ entre les catégories op-fibrées $\int F$ et $\int G$. D'après la proposition 1.3.9, pour montrer que $\int \mu$ est asphérique au-dessus de $\mathcal{J}$ (et donc une équivalence faible), il suffit de vérifier que les foncteurs induits fibres à fibres

$$\left(\int \mu \right)_i : \left(\int F \right)_i \rightarrow \left(\int G \right)_i$$

sont tous des équivalences faibles. Or il y a un isomorphisme $(\int H)_i \simeq H(i)$ naturel en $H \in \text{Ob Cat}^{\mathcal{J}}$ pour tout $i \in \text{Ob } \mathcal{J}$, à savoir

$$(i, a) \mapsto a, \quad (1_i, f) \mapsto f.$$

C'est-à-dire que pour tout $i \in \text{Ob } \mathcal{J}$, on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} F(i) & \xrightarrow{\mu(i)} & G(i) \\ \wr \downarrow & & \downarrow \wr \\ \left(\int F \right)_i & \longrightarrow & \left(\int G \right)_i. \end{array}$$

Ainsi le foncteur $(\int \mu)_i$ est isomorphe à $\mu(i) \in \mathcal{W}$, donc est lui-même une équivalence faible. $\square$

Avant d'introduire le dernier outil nécessaire à la preuve de la proposition 1.3.1 d'autodualité, faisons quelques rappels sur les catégories discrètes. L'association de l'ensemble $\text{Ob } \mathcal{A}$ à une petite catégorie $\mathcal{A}$ s'étend trivialement aux morphismes de Cat , donnant ainsi lieu à un foncteur

$$\text{Ob} : \text{Cat} \rightarrow \text{Set}.$$

Ce dernier admet un adjoint à gauche

$$\text{Disc} : \text{Set} \rightarrow \text{Cat}$$

associant à tout ensemble S la catégorie dont les objets sont les éléments de S et les morphismes les seules identités $1_s, s \in S$, et associant à une application ensembliste $S \rightarrow S'$ le foncteur naturel $\text{Disc}(S) \rightarrow \text{Disc}(S')$ qu'elle définit. Le foncteur Disc permet notamment de définir la construction de Grothendieck pour un foncteur à valeurs dans Set : si $F : \mathcal{J} \rightarrow \text{Set}$ est un foncteur d'une petite catégorie $\mathcal{J}$ à valeurs dans Set , sa construction de Grothendieck² $\int_{\mathcal{J}} F$ est la catégorie $\int_{\mathcal{J}} (\text{Disc} \circ F)$. Pour un tel F , la description de la catégorie $\int F$ est plus simple (on reprend les notations de la définition) :

2. La construction de Grothendieck sur un préfaisceaux en ensembles est en fait antérieure à la construction de Grothendieck introduite plus haut. Elle a été introduite par MacLane sous la terminologie *catégorie des éléments d'un préfaisceaux*.

- les objets sont les couples (i, a) avec $i \in \text{Ob } \mathcal{I}$ et $a \in F(i)$,
- les morphismes $(i, a) \rightarrow (i', a')$ sont les flèches $k: i \rightarrow i'$ de $\mathcal{I}$ telles que $F(k)(a) = a'$ (la seule flèche $f: F(k)(a) \rightarrow a'$ dans $\text{Disc}(F(i'))$ étant $\mathbf{1}_{a'}$),
- la composition est celle de $\mathcal{I}$ (la composante $f' \circ F(k)(f)$ de la définition étant ici toujours $\mathbf{1}_{a''} \circ F(k)(\mathbf{1}_{a'})$).

Pour un morphisme $u: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ de Cat , on définit maintenant

$$\Sigma(u): \mathcal{B}^\circ \times \mathcal{A} \rightarrow \text{Cat}$$

comme le foncteur composé

$$\mathcal{B}^\circ \times \mathcal{A} \xrightarrow{\mathbf{1}_{\mathcal{B}^\circ} \times u} \mathcal{B}^\circ \times \mathcal{B} \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{B}}(-, ?)} \text{Set} \xrightarrow{\text{Disc}} \text{Cat}.$$

Le foncteur $\Sigma(u)$ est un foncteur d'une petite catégorie à valeurs dans Cat , et on peut donc en prendre la construction de Grothendieck. On note alors $S(u)$ la catégorie $\int \Sigma(u)$ op-fibrée au-dessus de $\mathcal{B}^\circ \times \mathcal{A}$ via le foncteur $\vartheta_{\Sigma(u)}$. Composant avec les projections canoniques du produit $\mathcal{B}^\circ \times \mathcal{A}$, on obtient un diagramme de Cat :

$$\mathcal{B}^\circ \longleftarrow S(u) \longrightarrow \mathcal{A}.$$

On sent bien que ce processus qui à u associe le diagramme précédent est quelque part fonctoriel en u . Donnons un sens précis à cette intuition. Rappelons qu'on a noté $[1]$ la catégorie associée à l'ensemble partiellement ordonné $\{0 < 1\}$. On note aussi $\sqcup_\bullet$ la catégorie (index des sommes amalgamées) associée à l'ensemble partiellement ordonné $\{1 < 0 > 2\}$. Définissons alors un foncteur

$$\mathcal{S}: \text{Cat}^{[1]} \rightarrow \text{Cat}^{\sqcup_\bullet}$$

comme suit. À un objet $u: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ de $\text{Cat}^{[1]}$, $\mathcal{S}$ associe le diagramme (i.e. l'objet de $\text{Cat}^{\sqcup_\bullet}$)

$$\mathcal{B}^\circ \longleftarrow S(u) \longrightarrow \mathcal{A}.$$

À un carré commutatif (i.e. une flèche de $\text{Cat}^{[1]}$)

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ p \downarrow & & \downarrow q \\ A' & \xrightarrow{u'} & B' \end{array}$$

$\mathcal{S}$ associe le diagramme commutatif (i.e. la flèche de $\text{Cat}^{\sqcup_\bullet}$)

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{B}^\circ & \longleftarrow & S(u) & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ q^\circ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow p \\ \mathcal{B}'^\circ & \longleftarrow & S(u') & \longrightarrow & \mathcal{A}' \end{array}$$

Le seul point à préciser est la définition de la flèche $S(u) \rightarrow S(u')$ dans le diagramme précédent. On va la décrire explicitement. Les foncteurs $\Sigma(u)$ et $\Sigma(u')$ sont

à valeurs dans les catégories discrètes, foncteurs pour lesquels on a donné une description simple de la construction de Grothendieck. Ainsi, la catégorie $S(u)$ est la catégorie d'objets les triplets $(a, b, f : b \rightarrow u(a))$ avec $a \in \text{Ob } \mathcal{A}$, $b \in \text{Ob } \mathcal{B}$, $f \in \text{Mor } \mathcal{B}$, et de morphismes $(a, b, f) \rightarrow (a', b', f')$ les couples $(k : a \rightarrow a', h : b' \rightarrow b)$ avec $k \in \text{Mor } \mathcal{A}$, $h \in \text{Mor } \mathcal{B}$, tels que $f' = \text{Hom}_{\mathcal{B}}(h, u(k))(f) = u(k)fh$. Une description similaire tient pour $S(u')$. On définit alors la flèche $S(u) \rightarrow S(u')$ par

$$(a, b, f) \mapsto (p(a), q(b), q(f) : q(b) \rightarrow u'(p(a))), \quad (k, h) \mapsto (p(k), q(h)).$$

On vérifie facilement que l'application $\mathcal{S} : \text{Cat}^{[1]} \rightarrow \text{Cat}^{\text{U}}$ ainsi définie est fonctorielle.

On est enfin prêt à prouver la proposition d'autodualité.

Preuve de la proposition 1.3.1. Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental et $u : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ une équivalence faible. On cherche à montrer que $u^\circ : \mathcal{A}^\circ \rightarrow \mathcal{B}^\circ$ est également une équivalence faible.

On applique la fonctorialité de $\mathcal{S}$ à la flèche identité de $\text{Cat}^{[1]}$ suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{u} & \mathcal{B} \\ \mathbf{1}_{\mathcal{A}} \downarrow & & \downarrow \mathbf{1}_{\mathcal{B}} \\ \mathcal{A} & \xrightarrow{u} & \mathcal{B}. \end{array}$$

On a alors un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A}^\circ & \xleftarrow{s} & S(\mathbf{1}_{\mathcal{A}}) & \xrightarrow{t} & \mathcal{A} \\ u^\circ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow u \\ \mathcal{B}^\circ & \xleftarrow{s'} & S(\mathbf{1}_{\mathcal{B}}) & \xrightarrow{t'} & \mathcal{B}. \end{array}$$

Si on montre que s, t, s', t' sont des équivalences faibles, on pourra conclure : des applications successives de **FS2** montrera d'abord que $S(\mathbf{1}_{\mathcal{A}}) \rightarrow S(\mathbf{1}_{\mathcal{B}})$ est une équivalence faible, puis que u° en est une également.

Par définition, $t : S(\mathbf{1}_{\mathcal{A}}) \rightarrow \mathcal{A}$ est la composée

$$S(\mathbf{1}_{\mathcal{A}}) \xrightarrow{\vartheta_{\Sigma(\mathbf{1}_{\mathcal{A}})}} \mathcal{A}^\circ \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$$

de deux op-fibrations (cf. exemple 1.3.6), donc est une op-fibration elle-même (proposition 1.3.7). De plus, sa fibre $S(\mathbf{1}_{\mathcal{A}})_a$ en $a \in \text{Ob } \mathcal{A}$ est isomorphe à $(\mathcal{A}_{/a})^\circ$: ayant un objet initial, elle est asphérique (corollaire 1.2.7). La remarque 1.3.10 assure alors que t est asphérique, en particulier une équivalence faible. Le même argument sur t' montre que t' est une équivalence faible.

De façon similaire, s est une op-fibration (comme composée de deux op-fibrations) et ses fibres sont asphériques puisqu'isomorphes aux catégories ${}_a\backslash\mathcal{A}$ ayant un objet initial : s est asphérique, en particulier une équivalence faible. Le même argument sur s' montre que s' est une équivalence faible. $\square$

Outils homotopiques

Ce chapitre est dédié à l'introduction d'outils et méthodes, notamment simpliciales, forts utiles par la suite. Elles constituent la base de la théorie de l'homotopie classique et le point de départ de la réflexion de Grothendieck dans l'élaboration des catégories tests (voir l'introduction).

On commence par introduire la notion d'extension de Kan, sorte de généralisation des limites et colimites. Étant donné un foncteur $p: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ et un foncteur $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$, on cherche à « étendre le foncteur F au domaine $\mathcal{B}$ via p ». Une extension stricte $G: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ (i.e. telle que $G \circ p = F$) étant utopique, on cherche plutôt $G: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ muni d'une transformation naturelle $G \circ p \rightarrow F$ ou $F \rightarrow G \circ p$, le tout universel pour une telle propriété. De telles extensions affluent et leur existence se prouve dans un cadre très général, permettant par la suite de faire émerger naturellement des foncteurs pertinents. Cette première section est d'ordre technique, et l'homotopie n'entre pas encore en jeu.

On entre ensuite dans le vif du sujet, d'abord par des rappels sur la catégorie ordinaire et sur les ensembles simpliciaux, puis par l'introduction des foncteurs au centre de la théorie de l'homotopie : la réalisation topologique d'un ensemble simplicial, les simplexes singuliers d'un espace topologique, le nerf d'une catégorie et la catégorie fondamentale d'un ensemble simplicial. Armés de ces foncteurs, formant deux paires d'adjonction

$$\text{Cat} \rightleftarrows \hat{\Delta} \rightleftarrows \text{Top},$$

nous pourrions alors « remonter » la théorie de l'homotopie de Top dans Cat .

L'étude des nouvelles interprétations de l'homotopie (dans $\hat{\Delta}$ ou dans Cat) passe par l'abstraction d'un « cadre homotopique ». C'est le rôle des structures de catégories de modèles de Quillen. On montrera notamment comment elles peuvent servir à calculer les limites et colimites homotopiques. On terminera le chapitre en décrivant certaines structures de catégories de modèles utiles par la suite.

2.1 Extensions de Kan

Les extensions de Kan jouent un rôle central en théorie des catégories, même si leur usage est parfois caché. Pour souligner leur importance, le mieux est de citer Mac Lane ([Mac00]) :

The notion of Kan extensions subsumes all the other fundamental concepts of category theory.¹

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie quelconque. Tout foncteur $p: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ induit un foncteur

$$p^*: \mathcal{C}^{\mathcal{B}} \rightarrow \mathcal{C}^{\mathcal{A}}, \quad G \mapsto G \circ p.$$

Définition 2.1.1 (Extension de Kan). Le foncteur d'*extension de Kan à gauche* (respectivement à *droite*) *le long de p* est, s'il existe, l'adjoint à gauche (respectivement à droite) de p^* . On le note Lan_p (respectivement Ran_p), ou plus simplement Lan (respectivement Ran) quand p est sous-entendu.

Moralement, l'extension de Kan (à gauche ou à droite) d'un foncteur $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ le long de p est la « meilleure approximation » d'un éventuel foncteur $G: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ étendant le domaine de F :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{F} & \mathcal{C} \\ p \downarrow & \nearrow G & \\ \mathcal{B} & & \end{array}$$

Comme le montre la proposition suivante, les extensions de Kan affluent. Rappelons à toutes fins utiles qu'on note plus précisément $(p \downarrow b)$ la catégorie $\mathcal{A}_{/b}$ pour rappeler sa dépendance au foncteur p (voir remarque 1.1.2).

Proposition 2.1.2. Soient $\mathcal{A}$ une petite catégorie, $\mathcal{B}$ une catégorie quelconque, et $\mathcal{C}$ une catégorie cocomplète. Pour tout foncteur $p: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, le foncteur d'extension de Kan à gauche le long de p existe, et est donné pour tout $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ par

$$\text{Lan}_p F: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}, \quad b \mapsto \text{colim}_{(p \downarrow b)} (F).$$

(Dans l'énoncé précédent, on a bien sûr fait l'abus d'appeler encore F le foncteur composé

$$(p \downarrow b) \rightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{C}.)$$

Preuve de la proposition 2.1.2. Il suffit de vérifier que la formule donnée dans l'énoncé définit bien un adjoint à gauche de p^* . Soit donc $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ et $G: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$, et notons $\tilde{F}$ le foncteur $b \mapsto \text{colim}_{(p \downarrow b)} (F)$.

On a une application

$$\iota_{F,G}: \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathcal{B}}} (\tilde{F}, G) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathcal{A}}} (F, p^*G)$$

définie comme suit : la catégorie $(p \downarrow p(a))$ admettant l'objet $(a, \mathbf{1}_{p(a)})$ comme objet final pour tout objet a de $\mathcal{A}$, une transformation naturelle $\alpha: \tilde{F} \rightarrow G$ détermine en particulier une transformation naturelle $\iota_{F,G}(\alpha) = (\alpha(a): F(a) \rightarrow G(p(a)))_{a \in \text{Ob } \mathcal{A}}$, i.e. une transformation naturelle $F \rightarrow p^*G$.

Cette application est clairement naturelle en F et G . Elle est de plus bijective. En effet, une transformation naturelle $\beta: F \rightarrow p^*G$ admet comme antécédent par

1. En français : « La notion d'extension de Kan englobe tous les concepts fondamentaux de la théorie des catégories. »

$\iota_{F,G}$ la transformation naturelle $\alpha: \tilde{F} \rightarrow G$ définie comme suit : pour tout objet b de $\mathcal{B}$, le cocône d'index $(p \downarrow b)$ donné par les flèches

$$F(a) \xrightarrow{\alpha(a)} G(p(a)) \rightarrow G(b)$$

donne lieu à une flèche $\alpha(b): \tilde{F}(b) \rightarrow G(b)$; la famille $(\alpha(b))_{b \in \text{Ob } \mathcal{B}}$ est une transformation naturelle par définition (implicite) de $\tilde{F}$ sur les flèches de $\mathcal{B}$. Un tel antécédent est unique, par unicité dans la propriété universelle des colimites. $\square$

Bien entendu, on a également la proposition duale sur les extensions de Kan à droite.

Proposition 2.1.3. *Soient $\mathcal{A}$ une petite catégorie, $\mathcal{B}$ une catégorie quelconque, et $\mathcal{C}$ une catégorie complète. Pour tout foncteur $p: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, le foncteur d'extension de Kan à droite le long de p existe, et est donné pour tout $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ par*

$$\text{Ran}_p F: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}, \quad b \mapsto \lim_{(b \downarrow p)} (F).$$

$\square$

Application aux préfaisceaux. Une conséquence importante des propositions précédentes est leur application au cas $\mathcal{C} = \text{Set}$. En effet, Set est complète et cocomplète. Aussi, pour tout foncteur $p: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ avec $\mathcal{A}$ petite, le foncteur induit

$$(p^\circ)^*: \widehat{\mathcal{B}} \rightarrow \widehat{\mathcal{A}}$$

admet un adjoint à gauche Lan_{p° et un adjoint à droite Ran_{p° . En particulier, le foncteur $(p^\circ)^*$ commute aux limites et colimites. Bien entendu, par ce qui précède, on a les formules explicites suivantes : pour tout $F: \mathcal{A}^\circ \rightarrow \text{Set}$,

$$\text{Lan } F: b \mapsto \text{colim}_{(p^\circ \downarrow b)} (F), \quad \text{Ran } F: b \mapsto \lim_{(b \downarrow p^\circ)} (F).$$

Mais le lemme de Yoneda donne une forme plus manipulable encore de l'extension de Kan à droite. Notons $\mathfrak{h}_-^{\mathcal{B}}: \mathcal{B} \rightarrow \widehat{\mathcal{B}}$ le plongement de Yoneda pour la petite catégorie $\mathcal{B}$.

Proposition 2.1.4. *Dans les hypothèses précédentes, on a pour tout $F \in \text{Ob } \widehat{\mathcal{A}}$ un isomorphisme*

$$\text{Ran } F \simeq \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{A}}} (\mathfrak{h}_-^{\mathcal{B}} \circ p^\circ, F).$$

Preuve. Pour tout $b \in \text{Ob } \mathcal{B}$, on a les isomorphismes suivant :

$$\text{Ran } F(b) \simeq \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{B}}} (\mathfrak{h}_b^{\mathcal{B}}, \text{Ran } F) \simeq \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{A}}} ((p^\circ)^*(\mathfrak{h}_b^{\mathcal{B}}), F),$$

le premier isomorphisme étant donné par le lemme de Yoneda, le second par l'adjonction $(p^\circ)^* \dashv \text{Ran}$. Ces isomorphismes sont par définition naturels en b , d'où le résultat. $\square$

Extension le long du plongement de Yoneda. Considérons une petite catégorie $\mathcal{A}$ et le plongement de Yoneda

$$\mathfrak{h}_-^{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \widehat{\mathcal{A}}.$$

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie cocomplète. Alors la proposition 2.1.2 assure que tout foncteur $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ admet une extension de Kan à gauche $\text{Lan } F : \widehat{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{C}$ donnée par

$$\text{Lan } F(P) = \underset{(\mathfrak{h}_-^{\mathcal{A}} \downarrow P)}{\text{colim}} (F) \quad (\forall P \in \text{Ob } \widehat{\mathcal{A}}).$$

De plus, le plongement de Yoneda $\mathfrak{h}_-^{\mathcal{A}}$ est pleinement fidèle. Donc pour tout préfaisceau P sur $\mathcal{A}$, la catégorie $(\mathfrak{h}_-^{\mathcal{A}} \downarrow P) = \mathcal{A}_{/P}$ est simplement la sous-catégorie pleine de $\widehat{\mathcal{A}}_{/P}$ constitué des objets $\mathfrak{h}_a^{\mathcal{A}}$ pour tout $a \in \text{Ob } \mathcal{A}$. Par le lemme de Yoneda, cette catégorie est isomorphe à la catégorie dont les objets sont les couples (a, x) avec $a \in \text{Ob } \mathcal{A}$ et $x \in P(a)$, et dont les morphismes $(a, x) \rightarrow (a', x')$ sont les flèches $k : a \rightarrow a'$ de $\mathcal{A}$ telle que $P(k)(x') = x$. C'est-à-dire que $\mathcal{A}_{/P}$ est isomorphe à la construction de Grothendieck

$$\left(\int \left(\mathcal{A}^{\circ} \xrightarrow{P} \text{Set} \xrightarrow{\text{Disc}} \text{Cat} \right) \right)^{\circ}.$$

Enfin, le foncteur $\text{Lan } F : \widehat{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{C}$ admet comme adjoint à droite le foncteur

$$\mathcal{C} \rightarrow \widehat{\mathcal{A}}, \quad c \mapsto \mathfrak{h}_c^{\mathcal{C}} \circ F.$$

En effet, considérons l'application

$$\iota_{P,c} : \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{A}}} (P, \mathfrak{h}_c^{\mathcal{C}} \circ F) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}} \left(\underset{\mathcal{A}_{/P}}{\text{colim}} (F), c \right)$$

définie pour toute transformation naturelle $\eta : P \rightarrow \mathfrak{h}_c^{\mathcal{C}} \circ F$ comme suit : pour un objet a de $\mathcal{A}$, le lemme de Yoneda assure que $P(a)$ s'identifie naturellement à l'ensemble des flèches $\mathfrak{h}_a^{\mathcal{A}} \rightarrow P$ dans $\widehat{\mathcal{A}}$; les applications $\eta(a) : P(a) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}} (F(a), c)$ définissent ainsi un cocône de sommet sur c sur le diagramme $\mathcal{A}_{/P} \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ donné par F , induisant une flèche $\iota_{P,c}(\eta) : \underset{\mathcal{A}_{/P}}{\text{colim}} (F) \rightarrow c$. La naturalité de $\iota_{P,c}$ en P et c est claire, et elle admet un inverse, à savoir l'application qui à une flèche $f : \underset{\mathcal{A}_{/P}}{\text{colim}} (F) \rightarrow c$ de $\mathcal{C}$ associe la transformation naturelle η donnée pour tout objet $a \in \text{Ob } \mathcal{A}$ par

$$\eta(a) : P(a) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}} (F(a), c), \quad (\mathfrak{h}_a^{\mathcal{A}} \rightarrow P) \mapsto \left(F(a) \rightarrow \underset{\mathcal{A}_{/P}}{\text{colim}} (F) \xrightarrow{f} c \right).$$

La proposition suivante résume les résultats ci-dessus.

Proposition 2.1.5. *Soit $\mathcal{A}$ une petite catégorie et $\mathcal{C}$ une catégorie cocomplète. Tout foncteur $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ admet une extension de Kan à gauche le long du plongement de Yoneda $\mathfrak{h}_-^{\mathcal{A}}$ donné par*

$$\text{Lan } F : \widehat{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{C}, \quad P \mapsto \underset{\mathcal{A}_{/P}}{\text{colim}} (F).$$

De plus, $\text{Lan } F$ admet un adjoint à droite donné par

$$\mathcal{C} \rightarrow \widehat{\mathcal{A}}, \quad c \mapsto \mathfrak{h}_c^{\mathcal{C}} \circ F.$$

REMARQUE 2.1.6. Dans le cas présent, l'extension $\text{Lan } F$ n'est pas seulement une *approximation* d'un foncteur G tel que $F = G \circ \mathfrak{h}_-^{\mathcal{A}}$, mais est bel et bien un tel foncteur G . En effet, pour tout objet a de $\mathcal{A}$, la catégorie $(\mathfrak{h}_-^{\mathcal{A}} \downarrow \mathfrak{h}_a^{\mathcal{A}})$ est isomorphe à $\mathcal{A}_{/a}$ dont l'objet final est $(a, 1_a)$. On a donc un triangle commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{F} & \mathcal{C} \\ \mathfrak{h}_-^{\mathcal{A}} \downarrow & \nearrow \text{Lan } F & \\ \widehat{\mathcal{A}} & & \end{array}$$

2.2 Ensembles simpliciaux

On rappelle ici les notions d'objets simpliciaux et cosimpliciaux d'une catégorie. L'exemple canonique (et motivateur) de ces notions est l'espace topologique co-simplicial Δ_n^{top} défini comme l'ensemble de données suivant : pour tout $n \in \mathbb{N}$, le *simplexe topologique standard de dimension n* est l'espace topologique

$$\Delta_n^{\text{top}} = \{(x_0, \dots, x_n) \in [0, 1]^{n+1} \subseteq \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=0}^n x_i = 1\};$$

pour tout $n \in \mathbb{N}_{>0}$, les *applications de (co)faces* sont les applications continues

$$d_n^j : \Delta_{n-1}^{\text{top}} \rightarrow \Delta_n^{\text{top}}, \quad (x_0, \dots, x_{n-1}) \mapsto (x_0, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_{n-1})$$

avec $0 \leq j \leq n$ (ce sont les inclusions de $\Delta_{n-1}^{\text{top}}$ comme face de Δ_n^{top} évitant le j -ième sommet) ; pour tout $n \in \mathbb{N}$, les *applications de (co)dégénérescences* sont les applications continues

$$s_n^j : \Delta_{n+1}^{\text{top}} \rightarrow \Delta_n^{\text{top}}, \quad (x_0, \dots, x_{n+1}) \mapsto (x_0, \dots, x_{j-1}, x_j + x_{j+1}, \dots, x_{n+1})$$

avec $0 \leq j \leq n$ (l'application s_n^j est la projection de $\Delta_{n+1}^{\text{top}}$ parallèlement à l'arrête entre le j -ième et $j+1$ -ième sommets sur une des deux faces ne contenant pas l'arrête en question).

Catégorie des simplexes. Rappelons qu'on note $[n]$ la catégorie associée à l'ensemble ordonné $\{0 < 1 < \dots < n\}$. On définit alors la *catégorie Δ des simplexes* comme la catégorie dont

- les objets sont les petites catégories $[n]$ pour $n \in \mathbb{N}$,
- les morphismes $[n] \rightarrow [m]$ sont les foncteurs entre $[n]$ et $[m]$.

(Alternativement, Δ est la catégorie des ensembles ordonnés finis $\{0 < 1 < \dots < n\}$ et des applications croissantes entre eux-ci.)

On rappelle que Δ est engendré par les flèches

$$\delta_n^j : [n-1] \rightarrow [n], \quad \sigma_n^j : [n+1] \rightarrow [n],$$

où δ_n^j est le foncteur injectif sur les objets ne prenant pas la valeur j , et σ_n^j le foncteur surjectif sur les objets prenant deux fois la valeur j . Pour le détails, on réfère à [GZ67, II.2].

Objet (co)simplicial. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Un *objet cosimplicial* de $\mathcal{C}$ est un foncteur $\Delta \rightarrow \mathcal{C}$. Un objet cosimplicial $X: \Delta \rightarrow \mathcal{C}$ étant entièrement déterminé par les objets $X_n = X([n])$, $n \in \mathbb{N}$ de $\mathcal{C}$ et les flèches $d_n^j = X(\delta_n^j)$ (dites *cofaces*) et $s_n^j = X(\sigma_n^j)$ (dites *codégénérescences*) de $\mathcal{C}$, on le représente souvent comme :

$$X_0 \begin{array}{c} \xleftarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} X_1 \begin{array}{c} \xleftarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} X_2 \begin{array}{c} \xleftarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} \dots$$

les flèches vers la droites étant les d_n^j , celles vers la gauche les s_n^j . L'exemple de début de section est en fait l'objet cosimplicial $\Delta_{\bullet}^{\text{top}}$ de Top donné par

$$[n] \mapsto \Delta_n^{\text{top}}, \quad (f: [n] \rightarrow [m]) \mapsto \left((t_0, \dots, t_n) \mapsto \left(\sum_{i \in f^{-1}(j)} t_i \right)_{0 \leq j \leq m} \right)$$

Un *objet simplicial* de $\mathcal{C}$ est un foncteur $\Delta^{\circ} \rightarrow \mathcal{C}$. Un objet simplicial X est entièrement déterminé par la donnée des objets $X_n = X([n])$ et des flèches $d_n^j = X(\delta_n^j)$ (dites *faces*) et $s_n^j = X(\sigma_n^j)$ (dites *dégénérescences*). Il est représenté par

$$\dots \begin{array}{c} \xleftarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} X_2 \begin{array}{c} \xleftarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} X_1 \begin{array}{c} \xleftarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} X_0$$

les flèches vers la droites étant les d_n^j , celles vers la gauche les s_n^j .

Ensembles simpliciaux. Le reste du document fait la part belle aux objets simpliciaux de la catégorie Set . Un tel objet simplicial $\Delta^{\circ} \rightarrow \text{Set}$ est appelé *ensemble simplicial*. La catégorie $\text{Set}^{\Delta^{\circ}}$ des ensembles simpliciaux est alors la catégorie des préfaisceaux en ensembles sur Δ , et est noté en accord $\widehat{\Delta}$.

Étant donné un ensemble simplicial X , les ensembles $X([n])$ sont plus simplement notés X_n . Un élément de X_n , $n \in \mathbb{N}$ est dit un *n -simplexe de X* . Les objets simpliciaux étant des préfaisceaux en ensembles, toute la machinerie de Yoneda est à notre disposition. On note

$$\Delta[\bullet]: \Delta \rightarrow \widehat{\Delta}$$

le plongement (covariant) de Yoneda. Notamment, les n -simplexes d'un ensemble simplicial X s'identifient naturellement avec les flèches $\Delta[n] \rightarrow X$ de $\widehat{\Delta}$, que l'on appelle donc aussi n -simplexes. On s'efforcera au maximum de faire la distinction entre Δ et son image pleinement fidèle dans $\widehat{\Delta}$. Cependant, les abus habituels permettront parfois d'alléger les notations.

Soit X un ensemble simplicial. Les n -simplexes de X sont de deux sortes :

- les n -simplexes images d'un m -simplexe ($m < n$) par $X(f)$ pour $f: [n] \rightarrow [m]$ un épimorphisme de Δ (i.e. f surjectif sur les objets) ; un tel n -simplexe est dit *dégénéré* ;
- les autres ; ils sont dit *non dégénérés*.

Soit n un entier. L'ensemble simplicial $\Delta[n]$ a cela de particulier que son seul n -simplexe non dégénéré est $\mathbf{1}_{[n]}$. On appelle *bord de $\Delta[n]$* le sous-ensemble simplicial $\partial\Delta[n]$ de $\Delta[n]$ dont les k -simplexes sont les flèches $f: [k] \rightarrow [n]$ non surjectives (sur les objets).

REMARQUE 2.2.1. Le vocabulaire (faces, dégénérescences, simplexes, simplexes dégénérés, bord, etc.) vient de la topologie, et plus précisément de l'homologie, théorie gourmande en objets simpliciaux (du moins dans sa forme moderne). L'origine de ces termes deviendra sûrement plus claire quand on introduira le foncteur des chaînes singulières.

Troncation, squelette. Étant donné un ensemble simplicial X et un entier $n \in \mathbb{N}$, on se propose de ne considérer que les X_i avec $i \leq n$ et de voir quelle quantité d'information cela retire à la donnée de X tout entier.

Plus précisément, soit $n \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{C}$ une catégorie. On définit la catégorie $\Delta_{\leq n}$ comme la sous-catégorie pleine de Δ d'objets les $[j]$ avec $j \leq n$. L'inclusion

$$i: \Delta_{\leq n} \hookrightarrow \Delta$$

induit le foncteur de n -troncation

$$\mathrm{tr}_{n,\mathcal{C}} = (i^\circ)^*: \mathcal{C}^{\Delta^\circ} \rightarrow \mathcal{C}^{(\Delta_{\leq n})^\circ}, \quad X \mapsto \left((\Delta_{\leq n})^\circ \rightarrow \Delta^\circ \xrightarrow{X} \mathcal{C} \right).$$

Si $\mathcal{C}$ est cocomplète, les résultats de la section 2.1 assure que le foncteur d'extension de Kan à gauche le long de i° existe et est donné par

$$\mathrm{Lan}_{i^\circ}: \mathcal{C}^{(\Delta_{\leq n})^\circ} \rightarrow \mathcal{C}^{\Delta^\circ}, \quad X \mapsto \left([k] \mapsto \mathrm{colim}_{(i^\circ \downarrow [k])} (X) \right).$$

Le foncteur n -squelette $\mathrm{sk}_{n,\mathcal{C}}$ est alors défini comme

$$\mathrm{sk}_{n,\mathcal{C}} = \mathrm{Lan}_{i^\circ} \circ \mathrm{tr}_{n,\mathcal{C}}: \mathcal{C}^{\Delta^\circ} \rightarrow \mathcal{C}^{\Delta^\circ}.$$

L'objet simplicial $\mathrm{sk}_{n,\mathcal{C}}(X)$ associé à un objet simplicial X de $\mathcal{C}$ est en quelque sorte « la meilleure approximation (à gauche) possible » de X à partir de sa n -troncation. La coïunité

$$\mathrm{sk}_{n,\mathcal{C}} \rightarrow \mathbf{1}_{\mathcal{C}^{\Delta^\circ}}$$

est la relation de cette approximation à l'objet qu'elle approche.

Dans le cas où $\mathcal{C}$ est la catégorie cocomplète Set , on note plus simplement tr_n et sk_n pour $\mathrm{tr}_{n,\mathrm{Set}}$ et $\mathrm{sk}_{n,\mathrm{Set}}$. Dans la catégorie Set , on sait calculer les colimites effectivement : aussi le foncteur Lan_{i° n'a-t-il plus rien de mystérieux. On peut ainsi donner une description explicite du n -squelette d'un ensemble simplicial X (voir [GZ67, II.3.5, Corollaire 1] pour une preuve détaillée) : c'est l'ensemble simplicial dont les k -simplexes avec $k \leq n$ sont ceux de X , et dont les k -simplexes avec $k > n$ sont les k -simplexes dégénérés $X(f)(x)$ avec $f: [k] \rightarrow [m]$ épimorphisme, $m \leq n$ et $x \in X_m$. Notamment la coïunité $\mathrm{sk}_n \rightarrow \mathbf{1}_\Delta$ est une inclusion en tout point.

Si les ensembles simpliciaux nous intéressent tant, c'est qu'ils émergent naturellement dans l'observation des espaces topologiques, du moins du point de vue de l'homotopie/homologie. La section suivante précise en quel sens.

2.3 Types d'homotopies catégoriques

Dans cette section, on va voir que les ensembles simpliciaux codent bien les espaces topologiques à homotopie (faible) près. Ils sont même en quelque sorte plus

aptes à parler d'homotopie que les espaces topologiques générales : les pathologies de la topologie générale disparaissent pour mettre en lumière la combinatoire intrinsèque de l'homotopie.

On poursuivra ensuite les idées de Grothendieck : si les ensembles simpliciaux modèlent si bien les types d'homotopie, ce n'est qu'une conséquence d'un fait bien plus général, à savoir que ce sont des préfaisceaux sur une « bonne » catégorie (ici Δ). On ne se lancera pas dans l'étude de ce qu'est une « bonne » catégorie (c'est la notion de catégorie test) mais on suit la démarche de Grothendieck dans le sens suivant : la catégorie naturelle des types d'homotopie *doit* être la catégorie Cat des petites catégories.

Homotopie simpliciale. On rappelle tout d'abord la définition d'une équivalence d'homotopie faible entre espaces topologiques.

Définition 2.3.1 (Équivalence d'homotopie faible). Une application $f : T \rightarrow T'$ continue entre espaces topologiques est dite une *équivalence d'homotopie faible* si

- (i) l'application ensembliste induite

$$f_{0,*} : \pi_0(T) \rightarrow \pi_0(T')$$

est une bijection,

- (ii) pour tout $i \geq 1$, pour tout point $t \in T$, le morphisme de groupes induit

$$f_{i,*} : \pi_i(T, t) \rightarrow \pi_i(T', f(t))$$

est un isomorphisme de groupes.

On note W_∞ l'ensemble des équivalences d'homotopie faibles.

Toute équivalence d'homotopie est bien entendu une équivalence d'homotopie faible. La réciproque est fausse en général. Whitehead montre cependant la réciproque dans le cas où les espaces domaine et codomaine sont des CW-complexes ([Wit49]).

Rappelons que l'on a défini un espace topologique cosimplicial $\Delta_n^{\text{top}} : \Delta \rightarrow \text{Top}$. Son extension de Kan à gauche le long du plongement de Yoneda $\Delta[-]$ (cf. proposition 2.1.5) est notée

$$|-| : \widehat{\Delta} \rightarrow \text{Top}$$

et est appelé *foncteur réalisation topologique*. Il est donné pour tout ensemble simplicial X par :

$$|X| = \text{colim}_{\Delta/X} \left(([n], x) \mapsto \Delta_n^{\text{top}} \right)$$

Mais les colimites dans Top sont connues : si l'on équipe X_n de la topologie discrète, alors $|X|$ est l'espace topologique

$$\left(\coprod_{n \geq 0} X_n \times \Delta_n^{\text{top}} \right) / \sim$$

où $\sim$ est la relation d'équivalence engendrée par $(X(f)(x), t) \sim (x, \Delta_n^{\text{top}}(f)(t))$ pour $f : [m] \rightarrow [n]$, $x \in X_n$ et $t \in \Delta_m^{\text{top}}$. Plus informellement, on juxtapose des copies de Δ_n^{top} pour chaque n -simplexe de X avec n parcourant $\mathbb{N}$; puis on identifie

la copie $\Delta_{n-1}^{\text{top}}$ associée au $(n-1)$ -simplexe y avec la face évitant le sommet j de la copie Δ_n^{top} associée au n -simplexe x si $X(\delta_n^j)(x) = y$; de même, on identifie la copie $\Delta_{n+1}^{\text{top}}$ associée au $(n+1)$ -simplexe y avec la copie Δ_n^{top} associée au n -simplexe x en écrasant l'arête du sommet j au sommet $j+1$ si $X(\sigma_n^j)(x) = y$.

La proposition 2.1.5 donne également un foncteur

$$\text{Sing}: T \mapsto \left(\mathfrak{h}_T^{\text{Top}} \circ \Delta_{\bullet}^{\text{top}}: [n] \mapsto \text{Hom}_{\text{Top}}(\Delta_n^{\text{top}}, T) \right),$$

adjoint à droite de $|-|$.

REMARQUE 2.3.2. Le foncteur $|-|$ de réalisation topologique est à valeurs dans les CW-complexes. Cela a deux conséquences notables :

- (1) La réalisation d'un morphisme d'ensembles simpliciaux est une équivalence d'homotopie si et seulement si c'est une équivalence d'homotopie faible.
- (2) Le foncteur composé $|\text{Sing}(-)|$ associe à tout espace topologique T un (énorme) CW-complexe $|\text{Sing}(T)|$, équipé d'une application continue (la counité de l'adjunction)

$$|\text{Sing}(T)| \rightarrow T.$$

Cette application se révèle être une équivalence d'homotopie faible. Ainsi, à équivalence d'homotopie faible près, tout espace est un CW-complexe.

Définition 2.3.3 (Équivalence faible simpliciale). Un morphisme de $\widehat{\Delta}$ est dit une *équivalence faible simpliciale* si sa réalisation topologique est une équivalence d'homotopie faible.

On note $W_{\widehat{\Delta}}$ l'ensemble des équivalences faibles simpliciales.

Par définition, on a $|W_{\widehat{\Delta}}| \subseteq W_{\infty}$: le foncteur de réalisation topologique induit donc un foncteur

$$||-||: W_{\widehat{\Delta}}^{-1}\widehat{\Delta} \rightarrow W_{\infty}^{-1}\text{Top}.$$

On peut également montrer que $\text{Sing}(W_{\infty}) \subseteq W_{\widehat{\Delta}}$ (cela revient essentiellement au fait déjà mentionné que la counité $|\text{Sing}(-)| \rightarrow \mathbf{1}_{\text{Top}}$ est une équivalence d'homotopie faible point par point). On a alors un foncteur induit

$$\text{Sing}: W_{\infty}^{-1}\text{Top} \rightarrow W_{\widehat{\Delta}}^{-1}\widehat{\Delta},$$

faisant de $||-||$ et **Sing** des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre. Le détails peuvent se trouver dans [GJ99, I.11.4]

Homotopie catégorique. On a vu dans la dernière section que $\widehat{\Delta}$ est un bon modèle pour les types d'homotopies. Mais d'après Grothendieck, $\widehat{\Delta}$ n'est qu'une étape intermédiaire dans l'élaboration d'une catégorie décrivant en profondeur les types d'homotopies. Pour lui, cette catégorie « Graal » est Cat .

Rappelons que la catégorie Δ a été définie comme une sous-catégorie pleine de Cat . Notons $i: \Delta \hookrightarrow \text{Cat}$ cette inclusion. Son extension de Kan à gauche le long du plongement de Yoneda est notée

$$\varpi_1: \widehat{\Delta} \rightarrow \text{Cat},$$

et est donnée par la formule

$$X \mapsto \text{colim}_{\Delta/X} ([n], x) \mapsto [n].$$

Il admet un adjoint à droite (cf. proposition 2.1.5), appelé *nerf* et noté $N: \text{Cat} \rightarrow \widehat{\Delta}$, donné pour toute petite catégorie $\mathcal{A}$ par la formule

$$[n] \mapsto \text{Hom}_{\text{Cat}}([n], \mathcal{A}).$$

Détaillons un peu plus le foncteur *nerf*. Pour une petite catégorie $\mathcal{A}$, l'ensemble $(N\mathcal{A})_n$ est l'ensemble des chaînes

$$a_0 \xrightarrow{f_1} a_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_n} a_n$$

de n flèches composables de $\mathcal{A}$, les *faces* $N\mathcal{A}(\delta_n^j)$ sont les applications qui composent f_j et f_{j+1} :

$$\begin{array}{ccccccc} a_0 & \xrightarrow{f_1} & a_1 & \xrightarrow{f_2} & \dots & \xrightarrow{f_{j-1}} & a_{j-1} & \xrightarrow{f_j} & a_j & \xrightarrow{f_{j+1}} & a_{j+1} & \xrightarrow{f_{j+2}} & \dots & \xrightarrow{f_n} & a_n \\ & & & & & & & \downarrow & & & & & & & \\ a_0 & \xrightarrow{f_1} & a_1 & \xrightarrow{f_2} & \dots & \xrightarrow{f_{j-1}} & a_{j-1} & \xrightarrow{\quad} & a_{j+1} & \xrightarrow{f_{j+2}} & \dots & \xrightarrow{f_n} & a_n, \\ & & & & & & & \searrow & \nearrow & & & & & \\ & & & & & & & & a_j & & & & & \end{array}$$

et les *dégénérescences* $N\mathcal{A}(\sigma_n^j)$ sont les applications qui insèrent $\mathbf{1}_{a_j}$ entre f_j et f_{j+1} :

$$\begin{array}{ccccccc} a_0 & \xrightarrow{f_1} & a_1 & \xrightarrow{f_2} & \dots & \xrightarrow{f_j} & a_j & \xrightarrow{f_{j+1}} & a_{j+1} & \xrightarrow{f_{j+2}} & \dots & \xrightarrow{f_n} & a_n \\ & & & & & & & \downarrow & & & & & \\ a_0 & \xrightarrow{f_1} & a_1 & \xrightarrow{f_2} & \dots & \xrightarrow{f_j} & a_j & \xrightarrow{\mathbf{1}_{a_j}} & a_j & \xrightarrow{f_{j+1}} & a_{j+1} & \xrightarrow{f_{j+2}} & \dots & \xrightarrow{f_n} & a_n. \end{array}$$

Une description du foncteur ϖ_1 , en tant qu'adjoint à gauche de N , s'en déduit facilement. Pour un ensemble simplicial X , la catégorie $\varpi_1(X)$ est isomorphe à la catégorie $\tilde{X}$ dont

- les objets sont les éléments de X_0 ,
- les morphismes $x \rightarrow y$ pour $x, y \in X_0$ sont les éléments de

$$P_{x,y} / \sim$$

où l'ensemble $P_{x,y}$ est constitué des suites finies $(u_1, \dots, u_n) \in K_1^n$ telles que $X(\delta_1^1)(u_1) = x$, $X(\delta_1^0)(u_n) = y$ et $X(\delta_1^0)(u_i) = X(\delta_1^1)(u_{i+1})$ pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, et où $\sim$ est engendrée par $X(\delta_2^0)(v) \circ X(\delta_2^2)(v) \sim X(\delta_2^1)(v)$ pour tout $u \in K_2$,

- la composition est la concaténation des suites finies.

En effet, considérons l'application

$$\iota_{X,\mathcal{A}}: \text{Hom}_{\widehat{\Delta}}(X, N\mathcal{A}) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Cat}}(\tilde{X}, \mathcal{A})$$

qui envoie un morphisme $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}: X \rightarrow N\mathcal{A}$ sur le foncteur $\tilde{X} \rightarrow \mathcal{A}$ donné par $x \mapsto \varphi_0(x)$ sur les objets et $(u_1, \dots, u_n) \mapsto \varphi_1(u_n) \circ \dots \circ \varphi_1(u_1)$ sur les flèches. Elle est d'une part clairement naturelle en X et $\mathcal{A}$, et d'autre part bijective. En effet, un

foncteur $w: \tilde{X} \rightarrow \mathcal{A}$ fournit des applications $\varphi_n: X_n \rightarrow (\mathcal{N}\mathcal{A})_n$ associant à $x \in X_n$ la chaîne de flèches de $\mathcal{A}$

$$a_0 \xrightarrow{w(X(\tau_n^1)(x))} a_1 \xrightarrow{w(X(\tau_n^2)(x))} \dots \xrightarrow{w(X(\tau_n^n)(x))} a_n,$$

où $\tau_n^j: [1] \rightarrow [n]$ est la flèche de Δ définie par $0 \mapsto (j-1), 1 \mapsto j$. Cette famille $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forme un morphisme d'ensembles simpliciaux, antécédent manifeste de w . Un tel antécédent est nécessairement unique : un morphisme $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}: X \rightarrow \mathcal{N}\mathcal{A}$ est entièrement déterminé par (φ_0, φ_1) , le morphisme $a_{j-1} \rightarrow a_j$ dans la chaîne image de $x \in X_n$ par φ_n ($n \geq 1$) valant $\varphi_1(X(\tau_n^j)(x))$.

REMARQUE 2.3.4. On appelle $\varpi_1(X)$ la *catégorie fondamentale*² associée à l'ensemble simplicial X . Cette appellation (et la notation ϖ_1) est justifiée par le fait suivant : pour un espace topologique T , la catégorie $\varpi_1 \circ \text{Sing}(T)$ est isomorphe au groupoïde fondamental de T . En effet, d'après la description donnée ci-dessus, $\varpi_1(\text{Sing}(T))$ est la catégorie dont

- les objets sont les éléments de $\text{Sing}_0(T)$, i.e. les points de T ,
- les morphismes $x \rightarrow y$ sont les éléments du quotient

$$P_{x,y} / \sim$$

où $P_{x,y}$ est l'ensemble des suites finies $(u_1, \dots, u_n)$, les u_i étant des chemins de T (éléments de $\text{Sing}_1(T)$) concaténables, avec u_1 d'origine x et u_n d'extrémité y , et où $\sim$ identifie une face d'un 2-simplexe singulier avec la concaténation des deux autres faces. C'est bien l'ensemble des chemins de x à y à homotopie près.

Définition 2.3.5 (∞ -équivalence). Une ∞ -équivalence est un foncteur dont le nerf est une équivalence faible simpliciale.

On note $\mathcal{W}_\infty$ l'ensemble des équivalences faibles catégoriques.

Le reste du document est dédié à montrer que $\mathcal{W}_\infty$ est un localisateur fondamental (cf. 3.2), et qu'il est minimal au sens où il est inclus dans tout localisateur fondamental (cf. 3.1).

2.4 Limites et colimites homotopiques

Motivons tout d'abord les notions ultérieures par un exemple. Considérons dans Top les deux diagrammes

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{i} & D^2 \\ i \downarrow & & \\ D^2 & & \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{i} & D^2 \longrightarrow * \\ i \downarrow & & \\ D^2 & & \\ \downarrow & & \\ * & & \end{array}$$

2. La terminologie n'est pas standard. Elle apparaît néanmoins dans certaines références, par exemple <http://ncatlab.org/nlab/show/fundamental+category>.

où $i: S^1 \rightarrow D^2$ est l'inclusion du cercle comme bord du disque. D'un point de vue homotopique, ces diagrammes sont « les mêmes » puisque $D^2 \rightarrow *$ est une équivalence d'homotopie. En revanche, la prise de sommes amalgamées donne lieu au diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 S^1 & \xrightarrow{i} & D^2 & \longrightarrow & * \\
 \downarrow i & & \downarrow & & \downarrow \\
 D^2 & \longrightarrow & S^2 & \searrow h & \downarrow \\
 \downarrow & & & & \downarrow \\
 * & \longrightarrow & & & *
 \end{array}$$

où h n'a plus rien d'une équivalence d'homotopie. Les colimites de $\mathbf{Top}$ ne sont donc pas compatibles à la notion d'homotopie. Aussi convient-il de modifier la notion de recollement.

Un bref rappel sur les limites et colimites classiques est ici nécessaire à la bonne compréhension des définitions de leurs pendants homotopiques. Soit $\mathcal{J}$ une petite catégorie et $\mathcal{C}$ une catégorie quelconque. La catégorie $\mathcal{C}^{\mathcal{J}}$ est la catégorie des foncteurs (aussi dit diagrammes) $\mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$. En particulier, on a un foncteur *constant*

$$\delta: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{\mathcal{J}}$$

associant à tout objet c le foncteur $\mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ constant de valeur c , et à toute flèche $f: c \rightarrow d$ la transformation naturelle constante de valeur f . La catégorie $\mathcal{C}$ admet les limites (respectivement colimites) indexées par $\mathcal{J}$ si et seulement si δ admet un adjoint à droite (respectivement à gauche), alors noté $\lim_{\mathcal{J}}$ (respectivement $\text{colim}_{\mathcal{J}}$). Pour faire échos aux notions introduites en section 2.1, la limite (respectivement la colimite) d'un diagramme $F: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ est, si elle existe, l'extension de Kan à droite (respectivement à gauche) de F le long de $\mathcal{J} \rightarrow e$.

Soit maintenant W un sous-ensemble de $\text{Mor } \mathcal{C}$. Notons $W_{\mathcal{J}}$ le sous-ensemble de $\text{Mor } \mathcal{C}^{\mathcal{J}}$ des transformations naturelles α point par point dans W , i.e. telle que pour tout $i \in \text{Ob } \mathcal{J}$, $\alpha(i) \in W$. Alors, par la propriété universelle de la localisation, le foncteur composé

$$\mathcal{C} \xrightarrow{\delta} \mathcal{C}^{\mathcal{J}} \rightarrow W_{\mathcal{J}}^{-1}\mathcal{C}^{\mathcal{J}}$$

se factorise en un foncteur

$$\delta: W^{-1}\mathcal{C} \rightarrow W_{\mathcal{J}}^{-1}\mathcal{C}^{\mathcal{J}}.$$

Définition 2.4.1 (Limites et colimites homotopiques). Soit $\mathcal{C}$ une catégorie quelconque munie d'un ensemble $W \subseteq \text{Mor } \mathcal{C}$. Soit $\mathcal{J}$ une petite catégorie. Si le foncteur induit $\delta: W^{-1}\mathcal{C} \rightarrow W_{\mathcal{J}}^{-1}\mathcal{C}^{\mathcal{J}}$ admet un adjoint à droite (respectivement à gauche), on dit que $\mathcal{C}$ admet les *limites homotopiques* (respectivement *colimites homotopiques*) indexées par $\mathcal{J}$ relativement à W et on note cet adjoint $\text{holim}_{\mathcal{J}}$ (respectivement $\text{hocolim}_{\mathcal{J}}$).

Catégories de modèles. Dans [Qui67], Quillen introduit les catégories de modèles comme un cadre catégorique où définir une homotopie abstraite pertinente. On rappelle ici, sans preuve, les résultats concernant les catégories de modèles dont

on aura besoin par la suite. Pour plus de détails, on réfère à [Hov00], [GJ99] ou même directement [Qui67].

Pour toute catégorie $\mathcal{C}$, on dénote $\text{Arr}(\mathcal{C})$ la catégorie $\mathcal{C}^{[1]}$ des flèches de $\mathcal{C}$. Une *factorisation fonctorielle dans $\mathcal{C}$* est un couple (α, β) de foncteurs $\text{Arr}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Arr}(\mathcal{C})$ tel que soient satisfaites les égalités fonctorielles suivantes :

- (i) $\text{dom} \circ \alpha = \text{dom}$,
- (ii) $\text{cod} \circ \beta = \text{cod}$,
- (iii) $\text{cod} \circ \alpha = \text{dom} \circ \beta$,
- (iv) pour tout objet f de $\text{Arr}(\mathcal{C})$, $f = \beta(f) \circ \alpha(f)$.

Rappelons également qu'un *rétracte* dans $\mathcal{C}$ d'un objet d est un objet c tel qu'il existe $i: c \rightarrow d$ et $r: d \rightarrow c$ satisfaisant $ri = 1_c$ (r est alors appelée *rétraction*). Par abus, un rétracte d'un morphisme f de $\mathcal{C}$ est un rétracte de f comme objet de $\text{Arr}(\mathcal{C})$.

Définition 2.4.2 (Catégorie de modèles). Une *catégorie de modèles*³ est une catégorie $\mathcal{C}$, équipée de sous-ensembles $W, \text{Fib}, \text{Cofib}$ de $\text{Mor } \mathcal{C}$, satisfaisant aux axiomes suivants :

- CM1** la catégorie $\mathcal{C}$ est complète et cocomplète,
- CM2** pour tout $f, g \in \text{Mor } \mathcal{C}$ composables, si deux éléments de $\{f, g, gf\}$ sont dans W (respectivement Fib , Cofib), alors les trois éléments y sont,
- CM3** pour tout $f, g \in \text{Mor } \mathcal{C}$, si f est un rétracte de g et si $g \in W$ (respectivement Fib , Cofib), alors f aussi,
- CM4** pour tout carré commutatif de $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc} c & \longrightarrow & c' \\ i \downarrow & & \downarrow p \\ d & \longrightarrow & d', \end{array}$$

si $i \in \text{Cofib} \cap W$ et $p \in \text{Fib}$ (respectivement $i \in \text{Cofib}$ et $p \in \text{Fib} \cap W$), alors il existe h faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} c & \longrightarrow & c' \\ i \downarrow & \nearrow h & \downarrow p \\ d & \longrightarrow & d', \end{array}$$

- CM5** il existe deux factorisations fonctorielles (α, β) et (γ, δ) telles que pour tout morphisme f de $\mathcal{C}$,

$$\alpha(f) \in \text{Cofib}, \quad \beta(f) \in \text{Fib} \cap W$$

et

$$\gamma(f) \in \text{Cofib} \cap W, \quad \delta(f) \in \text{Fib}.$$

3. Notre définition de catégorie de modèles est celle de catégorie de modèles *fermée* introduite par Quillen. La notion non fermée n'ayant que peu d'intérêt pour ce document, on allège la terminologie.

TERMINOLOGIE 2.4.3. Les éléments de W sont appelés *équivalences faibles*, ceux de Cofib des *cofibrations* et ceux de Fib des *fibrations*. Un (co)fibration qui est également une équivalence faible est dite une (co)fibration triviale.

Suivant cette terminologie, on résume **CM4** par : les fibrations ont la propriété de relèvement à droite relativement aux cofibrations triviales, et les cofibrations ont la propriété de relèvement à gauche relativement aux fibrations triviales. La condition **CM5** devient : toute flèche de $\mathcal{C}$ se factorise fonctoriellement en la composée d'une fibration triviale par un cofibration et en la composée d'une fibration par une cofibration triviale.

La donnée de du triplet $(W, \text{Cofib}, \text{Fib})$ est appelée une *structure de catégorie de modèles* sur $\mathcal{C}$.

Proposition 2.4.4. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie de modèles.

L'ensemble Fib (respectivement $\text{Fib} \cap W$) est exactement l'ensemble des flèches de $\mathcal{C}$ ayant la propriété de relèvement à droite relativement à $\text{Cofib} \cap W$ (respectivement Cofib).

L'ensemble Cofib (respectivement $\text{Cofib} \cap W$) est exactement l'ensemble des flèches de $\mathcal{C}$ ayant la propriété de relèvement à gauche relativement à $\text{Fib} \cap W$ (respectivement Fib).

Preuve. Voir [Hov00, Lemme 1.1.10]. □

REMARQUE 2.4.5. Pour savoir si la donnée d'ensembles W et Fib (respectivement W et Cofib) peuvent se compléter en une structure de catégorie de modèles, il suffit donc de poser Cofib (respectivement Fib) l'ensemble des flèches ayant la propriété de relèvement à gauche (respectivement à droite) relativement à $W \cap \text{Fib}$ (respectivement $W \cap \text{Cofib}$) et de vérifier si le jeu de données vérifie la définition.

Définition 2.4.6. La *catégorie homotopique* $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})$ d'une catégorie de modèles $\mathcal{C}$ est la localisation $W^{-1}\mathcal{C}$.

REMARQUE 2.4.7. La catégorie $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})$ ne dépend que de l'ensemble W , et pas des autres données de la structure de catégorie de modèles.

La proposition suivante assure que l'ensemble W est saturé.

Proposition 2.4.8. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie de modèle. Pour toute flèche f de $\mathcal{C}$, l'image de f dans $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})$ est un isomorphisme si et seulement si f est un équivalence faible de $\mathcal{C}$.

Preuve. Voir [Hov00, Théorème 1.2.10.(iv)]. □

Définition 2.4.9 (Objets fibrants et cofibrants). Un objet c d'une catégorie de modèles $\mathcal{C}$ est dit *fibrant* (respectivement *cofibrant*) si la flèche $c \rightarrow e$ vers l'objet final (respectivement $\emptyset \rightarrow c$ depuis l'objet initial) est une fibration (respectivement une cofibration).

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie de modèles, où l'on note (α, β) et (γ, δ) les deux factorisations fonctorielles données par l'axiome **CM5**. Remarquons que pour tout objet c , la factorisation

$$c \xrightarrow{\gamma(c \rightarrow e)} c' \xrightarrow{\delta(c \rightarrow e)} e$$

fournit un objet c' , fibrant par définition, et isomorphe à c dans $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})$. On appelle c' un *remplacement fibrant* de c . La fonctorialité de la factorisation (γ, δ) assure

alors que l'association $R: c \mapsto c'$ s'étend en un foncteur $R: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ à valeurs dans les objets fibrants. De même, la factorisation

$$\emptyset \xrightarrow{\alpha(\emptyset \rightarrow c)} c'' \xrightarrow{\beta(\emptyset \rightarrow c)} c$$

donne lieu à un c'' cofibrant et isomorphe à c dans $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})$, appelé *remplacement cofibrant de c* . Ceci définit un foncteur $Q: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ à valeurs dans les objets cofibrants.

Foncteurs dérivés. Les catégories de modèles sont entre autre utiles pour calculer des limites et colimites homotopiques. Cela demande l'introduction des notions d'adjonction de Quillen et de foncteur dérivé, par ailleurs importantes en elle-même.

Définition 2.4.10 (Foncteurs dérivés). Soient $\mathcal{C}$ une catégorie de modèles et $\mathcal{D}$ une catégorie quelconque. Soit $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un foncteur.

Si F envoie toute équivalence faible entre objets fibrants de $\mathcal{C}$ sur un isomorphisme de $\mathcal{D}$, alors on définit le *foncteur dérivé à droite de F*

$$\mathbb{R}F: \mathbf{Ho}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{D}$$

comme le foncteur induit par $F \circ R: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$.

Si F envoie toute équivalence faible entre objets cofibrants de $\mathcal{C}$ sur un isomorphisme de $\mathcal{D}$, alors on définit le *foncteur dérivé à gauche de F*

$$\mathbb{L}F: \mathbf{Ho}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{D}$$

comme le foncteur induit par $F \circ Q: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$.

Proposition 2.4.11. Soit une adjonction $F: \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$ entre des catégories de modèles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) F préserve les cofibrations et les cofibrations triviales,
- (ii) G préserve les fibrations et les fibrations triviales,
- (iii) F préserve les cofibrations et G les fibrations.

Preuve. L'adjonction $F \dashv G$ assure qu'une flèche $F(i)$ à la propriété de relèvement à gauche relativement à p si et seulement si i à la propriété de relèvement à gauche relativement à $G(p)$. La caractérisation 2.4.4 permet alors de conclure. $\square$

Définition 2.4.12 (Adjonction de Quillen). Une adjonction $F: \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$ entre des catégories de modèles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ est dite une *adjonction de Quillen* si l'une des trois assertions équivalentes de la proposition 2.4.11 est satisfaite.

On dit alors que F est un *foncteur de Quillen à gauche* et G un *foncteur de Quillen à droite*.

On rappelle qu'en tant que localisation, la catégorie homotopique $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})$ d'une catégorie de modèles $\mathcal{C}$ est équipée d'un foncteur canonique $\pi_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathcal{C})$.

Proposition 2.4.13. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories de modèles. Soit $F: \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$ une adjonction de Quillen. On note $\mathbf{F}$ le foncteur $\pi_{\mathcal{D}} \circ F$ et $\mathbf{G}$ le foncteur $\pi_{\mathcal{C}} \circ G$. Les foncteurs $\mathbb{L}\mathbf{F}$ et $\mathbb{R}\mathbf{G}$ existent alors et forment une adjonction

$$\mathbb{L}\mathbf{F}: \mathbf{Ho}(\mathcal{C}) \rightleftarrows \mathbf{Ho}(\mathcal{D}) : \mathbb{R}\mathbf{G}.$$

Preuve. Le premier point consiste à montrer que $\mathbf{F}$ envoie les équivalences faibles entre objets cofibrants de $\mathcal{C}$ sur des équivalences faibles de $\mathcal{D}$ et que $\mathbf{G}$ envoie les équivalences faibles entre objets fibrants de $\mathcal{D}$ sur des équivalences faibles de $\mathcal{C}$. Ce résultat est connu sous le nom de « lemme de Ken Brown » (voir [Hov00, Lemme 1.1.12]). Le deuxième point, à savoir l'adjonction des foncteurs dérivés, est le contenu de [Hov00, Lemme 1.3.10]. $\square$

REMARQUE 2.4.14. On fait souvent l'abus d'écrire $\mathbb{L}F$ (respectivement $\mathbb{R}G$) à la place de $\mathbb{L}(\pi_{\mathcal{D}} \circ F)$ (respectivement $\mathbb{R}(\pi_{\mathcal{C}} \circ G)$).

La proposition 2.4.13 permet de calculer des (co)limites homotopiques dans une catégorie de modèles. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie de modèles et $\mathcal{J}$ une petite catégorie. En particulier, $\mathcal{C}$ étant complète, elle admet les limites indexées par $\mathcal{J}$, donnant lieu à une adjonction $\delta: \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{C}^{\mathcal{J}}: \lim_{\mathcal{J}}$. Supposons de plus que $\mathcal{C}^{\mathcal{J}}$ admette une structure de catégorie de modèles dans laquelle

- les équivalences faibles sont exactement les équivalences faibles point par point, i.e. une flèche α de $\mathcal{C}^{\mathcal{J}}$ est une équivalence faible si et seulement si toutes les flèches $\alpha(i)$, $i \in \text{Ob } \mathcal{J}$ sont des équivalences faibles de $\mathcal{C}$,
- les cofibrations sont exactement les cofibrations point par point, i.e. une flèche α de $\mathcal{C}^{\mathcal{J}}$ est une cofibration si et seulement si toutes les flèches $\alpha(i)$, $i \in \text{Ob } \mathcal{J}$ sont des cofibrations de $\mathcal{C}$.

Alors le foncteur δ préserve les cofibrations et les cofibrations triviales. Aussi l'adjonction $\delta: \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{C}^{\mathcal{J}}: \lim_{\mathcal{J}}$ est-elle une adjonction de Quillen. La proposition 2.4.13 assure alors une adjonction localisée

$$\mathbb{L}\delta: \mathbf{Ho}(\mathcal{C}) \rightleftarrows \mathbf{Ho}(\mathcal{C}^{\mathcal{J}}): \mathbb{R}\lim_{\mathcal{J}}. \quad (2.1)$$

Le foncteur δ respectant les équivalences faibles, il envoie un remplacement cofibrant d'un objet c sur un objet isomorphe à $\delta(c)$ dans $\mathbf{Ho}(\mathcal{C}^{\mathcal{J}})$. Ainsi, $\mathbb{L}\delta$ est isomorphe au foncteur $\delta: W^{-1}\mathcal{C} \rightarrow W_{\mathcal{J}}^{-1}\mathcal{C}^{\mathcal{J}}$ introduit plus haut. Donc l'adjonction (2.1) montre par définition que les limites homotopiques indexées par $\mathcal{J}$ (relativement à W) existent et qu'on en a une formule :

$$\text{holim}_{\mathcal{J}}(-) \simeq \mathbb{R}\lim_{\mathcal{J}}.$$

Ainsi, pour de telles catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{J}$, la limite homotopique d'un diagramme $F: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ s'obtient comme la limite (dans $\mathcal{C}$) d'un diagramme $\tilde{F}: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$, remplacement fibrant de F dans $\mathcal{C}^{\mathcal{J}}$, cette limite étant vue comme objet de $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})$.

On établit un discours dual pour le calcul des colimites homotopiques. On a donc la formule

$$\text{hocolim}_{\mathcal{J}}(-) \simeq \mathbb{L}\text{colim}_{\mathcal{J}}.$$

quand la catégorie $\mathcal{C}^{\mathcal{J}}$ admet une structure de catégorie de modèles dans laquelle les équivalences faibles et les fibrations sont définies point par point. Cela permet de calculer une colimite homotopique d'un diagramme comme la colimite du remplacement cofibrant du diagramme dans la structure en question.

EXEMPLE(S) 2.4.15. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie de modèles et S un ensemble qu'on considère comme une catégorie discrète. On vérifie facilement que $\mathcal{C}^S$ admet une structure de catégorie de modèles : celle où les équivalences faibles, les cofibrations et les fibrations sont définies point par point. Par ce qui précède, $\mathcal{C}$ admet alors tous les (co)produits homotopiques.

REMARQUE 2.4.16. Attention ! En général, on ne sait pas construire sur la catégorie de diagramme $\mathcal{C}^J$ une structure de catégorie de modèles avec équivalences faibles et fibrations (ou équivalences faibles et cofibrations) définies point par point. Il faut pour cela des hypothèses sur la catégorie de modèles $\mathcal{C}$ ou sur la catégorie J . On ne cherche pas ici à faire une étude systématique des structures de catégories de modèles sur les catégories de diagrammes : on se contentera d'étudier les cas particuliers qui nous intéressent (principalement $\mathcal{C} = \widehat{\Delta}$). Le curiosité du lecteur pourra se satisfaire de [Lur09, Appendice 2.8].

Équivalence de Quillen. Dans le cadre des catégories de modèles, les équivalences de catégories ne nous importent guère : on veut raisonner « à homotopies près », i.e. au niveau des catégories homotopiques associées.

Définition 2.4.17 (Équivalence de Quillen). Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories de modèles. Une adjonction de Quillen $F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$ est une *équivalence de Quillen* si l'adjonction induite

$$\mathbb{L}F : \mathbf{Ho}(\mathcal{C}) \rightleftarrows \mathbf{Ho}(\mathcal{D}) : \mathbb{R}G$$

est une équivalence de catégories.

2.5 Quelques catégories de modèles

Dans cette section, on va exhiber quelques structures de catégories de modèles sur les catégories qui nous intéressent. La plupart du temps, on se contentera d'affirmer qu'un jeu de données définit une structure de catégorie de modèles, en se référant à la littérature pour les preuves. En effet, il est souvent long et fastidieux de prouver qu'un triplet $(W, \text{Cofib}, \text{Fib})$ forme une structure de catégorie de modèles. Le but de cet exposé n'étant pas les catégories de modèles en elles-mêmes mais l'utilisation de celles-ci dans le chapitre suivant, on s'abstiendra de donner les preuves ici. En revanche, on prendra bien soin de décrire exactement les équivalences faibles, les fibrations et les cofibrations à chaque fois.

Modèles topologiques. Le vocabulaire « équivalence faible », « fibration » et « cofibration » vient bien entendu de la topologie. La catégorie $\mathbf{Top}$, complète et cocomplète, admet en effet une structure de catégorie de modèles, qu'on définit maintenant.

Rappelons qu'une *fibration de Serre* est une flèche $p : X \rightarrow Y$ de $\mathbf{Top}$ relevant les homotopies entre applications de domaine les simplexes standards, i.e. telle que pour tout carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Delta_n^{\text{top}} & \longrightarrow & X \\ \downarrow (1_{\Delta_n^{\text{top}}}, 0) & & \downarrow p \\ \Delta_n^{\text{top}} \times [0, 1] & \longrightarrow & Y \end{array} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

il existe $h: \Delta_n^{\text{top}} \times [0, 1] \rightarrow X$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Delta_n^{\text{top}} & \xrightarrow{\quad} & X \\ (1_{\Delta_n^{\text{top}}}, 0) \downarrow & \searrow h & \downarrow p \\ \Delta_n^{\text{top}} \times [0, 1] & \xrightarrow{\quad} & Y. \end{array}$$

Proposition 2.5.1. *La catégorie Top admet une structure de catégorie de modèles dans laquelle*

- *les équivalences faibles sont les équivalences d'homotopies faibles,*
- *les fibrations sont les fibrations de Serre,*
- *les cofibrations sont les flèches ayant la propriété de relèvement à gauche relativement aux fibrations triviales.*

Preuve. Voir [Hov00, Section 2.4]. □

Le but étant de modéliser les types d'homotopies, on a bien entendu mis une structure de catégorie de modèles dont les équivalences faibles sont les équivalences d'homotopie faibles. De cette façon, on a $\mathbf{Ho}(\text{Top}) = \text{Hot}$.

Modèles simpliciaux. La structure de catégorie de modèles sur Top était, pour ce document, d'ordre culturel. La structure à venir sur $\hat{\Delta}$ est en revanche primordiale pour le chapitre 3.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \dots, n\}$, on définit le k -ième *cornet de dimension n* comme le sous-ensemble simplicial $\Lambda^k[n]$ de $\Delta[n]$ dont les m -simplexes sont les flèches $f: [m] \rightarrow [n]$ évitant au moins un $j \neq k$. Une inclusion du type $\Lambda^k[n] \hookrightarrow \Delta[n]$ est dite une *inclusion de cornet*. Les réalisations topologiques des inclusions de cornet de basses dimensions justifient la terminologie adoptée :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^0[1] : \bullet & \subseteq & \begin{array}{c} \bullet^0 \\ | \\ \bullet^1 \end{array} & \Lambda^1[1] : \bullet & \subseteq & \begin{array}{c} \bullet^0 \\ | \\ \bullet^1 \end{array} \\ \\ \Lambda^0[2] : \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \end{array} & \subseteq & \begin{array}{c} 0 \\ \triangle \\ 1 \quad 2 \end{array} & \Lambda^1[2] : \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \end{array} & \subseteq & \begin{array}{c} 0 \\ \triangle \\ 1 \quad 2 \end{array} \\ \\ & & \Lambda^2[2] : \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \end{array} & \subseteq & \begin{array}{c} 0 \\ \triangle \\ 1 \quad 2 \end{array} \end{array}$$

Une flèche $f: K \rightarrow L$ d'ensembles simpliciaux est dite une *fibration de Kan* si elle a la propriété de relèvement à droite relativement aux inclusions de cornet, i.e. si pour tous entiers n, k avec $0 \leq k \leq n$ et $n > 0$, les carrés commutatifs

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^k[n] & \xrightarrow{\quad} & K \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta[n] & \xrightarrow{\quad} & L \end{array}$$

admettent un relèvement $h: \Delta[n] \rightarrow K$:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^k[n] & \longrightarrow & K \\ \downarrow & \nearrow h & \downarrow \\ \Delta[n] & \longrightarrow & L. \end{array}$$

Proposition 2.5.2. *La catégorie $\widehat{\Delta}$ admet une structure de catégorie de modèles dans laquelle*

- *les équivalences faibles sont les équivalences faibles simpliciales (les éléments de $W_{\widehat{\Delta}}$),*
- *les cofibrations sont les monomorphismes, i.e. les morphismes simpliciaux $f: K \rightarrow L$ tels que $f_n: K_n \rightarrow L_n$ soit injectif pour tout $n \in \mathbb{N}$,*
- *les fibrations sont les fibrations de Kan.*

Preuve. Voir [Hov00, Section 3.2]. □

Dans cette structure de catégorie de modèles, l'adjonction $|-|: \widehat{\Delta} \rightleftarrows \mathbf{Top} : \mathbf{Sing}$ devient une équivalence de Quillen : l'équivalence de catégories induite

$$\mathbb{L}|-|: \mathbf{Ho}(\widehat{\Delta}) \rightleftarrows \mathbf{Hot} : \mathbb{R}\mathbf{Sing}$$

est alors celle déjà énoncée en section 2.3.

REMARQUE 2.5.3. Pour un ensemble simplicial K , toutes les applications $\emptyset \rightarrow K_n$ sont injectives. Ainsi, tout ensemble simplicial est cofibrant.

Modèles bisimpliciaux. La catégorie des ensembles bisimpliciaux est $\widehat{\Delta \times \Delta}$. Un ensemble bisimplicial K peut donc se représenter par

$$\begin{array}{ccccccc} & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdots & \rightrightarrows & K_{2,2} & \rightrightarrows & K_{2,1} & \rightrightarrows & K_{2,0} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdots & \rightrightarrows & K_{1,2} & \rightrightarrows & K_{1,1} & \rightrightarrows & K_{1,0} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdots & \rightrightarrows & K_{0,2} & \rightrightarrows & K_{0,1} & \rightrightarrows & K_{0,0} \end{array} \quad (2.2)$$

toutes les lignes $K_{n,\bullet}$ et colonnes $K_{\bullet,n}$ étant des ensembles simpliciaux. Le but de ce paragraphe est de décrire une structure de catégorie de modèles sur $\widehat{\Delta \times \Delta}$, appelée structure de *Reedy*, où les équivalences faibles sont les morphismes $f: K \rightarrow L$ tels que les morphismes d'ensembles simpliciaux induits sur chaque ligne $f_{n,\bullet}: K_{n,\bullet} \rightarrow L_{n,\bullet}$ soient des équivalences faibles simpliciales.

La première chose à remarquer est qu'on a une équivalence de catégories entre $\widehat{\Delta \times \Delta}$ et $\widehat{\Delta}^{(\Delta^\circ)}$ donnée par

$$K \mapsto ([n] \mapsto K_{n,\bullet}).$$

Via cette équivalence, les morphismes $f : K \rightarrow L$ induisant sur chaque ligne une équivalence faible simpliciale $f_{n,\bullet} : K_{n,\bullet} \rightarrow L_{n,\bullet}$ sont précisément les équivalences faibles point par point. On va donc pouvoir utiliser la théorie générale des structures de catégorie de modèles de Reedy (voir [Lur09, Appendice 2.9]).

Notons ω la catégorie

$$0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots$$

associée à l'ensemble ordonné $\mathbb{N}$. La petite catégorie Δ est équipée de deux sous-catégories Δ_L et Δ_R contenant chacune tous les objets de Δ et où

- les flèches de Δ_L sont les flèches $[n] \rightarrow [m]$ surjectives,
- les flèches de Δ_R sont les flèches $[n] \rightarrow [m]$ injectives,

et d'une factorisation fonctorielle (α, β) définie pour tout flèche $f : [n] \rightarrow [m]$ par la factorisation canonique

$$[n] \xrightarrow{\alpha(f)} [k] \xrightarrow{\beta(f)} [m]$$

où k est le cardinal de l'image de f . De plus, ces données vérifient que

- α est à valeurs dans les flèches de Δ_L et β dans celles de Δ_R ,
- il existe deux foncteurs *degrés* $\Delta_L \rightarrow \omega^\circ$ et $\Delta_R \rightarrow \omega$ tous deux définis sur les objets par $[n] \mapsto n$ et sur les flèches par

$$([n] \xrightarrow{f} [m]) \mapsto (n \rightarrow m).$$

(Attention : pour le premier foncteur $m \leq n$ et donc $n \rightarrow m$ est bien une flèche de ω° , tandis que pour le deuxième foncteur $n \leq m$ d'où $n \rightarrow m$ est un flèche de ω .)

Cela fait de Δ une *catégorie de Reedy* ([Lur09, Appendice 2.9]). Par conséquent Δ° en est une également, avec comme sous-catégories distinguées Δ_R° et Δ_L° , comme factorisation fonctorielle $(\tilde{\beta}, \tilde{\alpha})$ factorisant la flèche $\tilde{f} : [m] \rightarrow [n]$ de Δ° associée à $f : [n] \rightarrow [m] \in \text{Mor } \Delta$ comme

$$[n] \xleftarrow{\tilde{\alpha}(f)} [k] \xleftarrow{\tilde{\beta}(f)} [m]$$

et avec comme foncteurs degrés les foncteurs $\Delta_R^\circ \rightarrow \omega^\circ$ et $\Delta_L^\circ \rightarrow \omega$ opposés aux foncteurs degrés de Δ .

Soit $m \in \mathbb{N}$. On va définir deux foncteurs $L_m : \widehat{\Delta \times \Delta} \rightarrow \widehat{\Delta}$ et $M_m : \widehat{\Delta \times \Delta} \rightarrow \widehat{\Delta}$. Pour ce faire, on note $i_{L,m} : \Delta_L^{<m} \hookrightarrow \Delta_L$ et $i_{R,m} : \Delta_R^{<m} \hookrightarrow \Delta_R$ les inclusions pleines des objets $[k]$ avec $k < m$. On définit alors les foncteurs L_m et M_m comme

$$L_m : K \mapsto \text{colim}_{(i_{L,m} \circ \downarrow [m])} (K) \quad \text{et} \quad M_m : K \mapsto \lim_{([m] \downarrow i_{R,m} \circ)} (K)$$

où un ensemble bisimplicial K , vu comme l'ensemble simplicial simplicial $[n] \mapsto K_{n,\bullet}$, dénote encore abusivement les diagrammes

$$(i_{L,m} \circ \downarrow [m]) \rightarrow \Delta^\circ \xrightarrow{K} \widehat{\Delta} \quad \text{et} \quad ([m] \downarrow i_{R,m} \circ) \rightarrow \Delta^\circ \xrightarrow{K} \widehat{\Delta}.$$

REMARQUE 2.5.4. Cette construction des foncteurs L_m et M_m n'est pas spécifique à notre étude. Elle existe dans le contexte plus large des diagrammes indexés par une catégorie de Reedy dans une catégorie de modèles. On renvoie encore une fois à [Lur09, Appendice 2.9] ou à [Hov00, Section 5.2] pour plus de détails.

Par définition de L_m et M_m , on a deux transformations naturelles

$$\lambda_m: L_m \rightarrow m^* \quad \text{et} \quad \mu_m: m^* \rightarrow M_m,$$

où m^* est le foncteur d'évaluation $K \mapsto K_{m,\bullet}$. En particulier, pour tout morphisme $f: K \rightarrow K'$ d'ensembles bisimpliciaux, on a deux carrés commutatifs

$$\begin{array}{ccc} L_m K & \longrightarrow & K_{m,\bullet} \\ L_m f \downarrow & & \downarrow f_{m,\bullet} \\ L_m K' & \longrightarrow & K'_{m,\bullet} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} K_{m,\bullet} & \longrightarrow & M_m K \\ f_{m,\bullet} \downarrow & & \downarrow M_m f \\ K'_{m,\bullet} & \longrightarrow & M_m K' \end{array}$$

induisant respectivement les flèches

$$v_m(f): L_m K' \sqcup_{L_m K} K_{m,\bullet} \rightarrow K'_{m,\bullet} \quad \text{et} \quad w_m(f): K_{m,\bullet} \rightarrow K'_{m,\bullet} \times_{M_m K'} M_m K.$$

La théorie générale des catégories de Reedy donne la structure de catégorie de modèles cherchée sur $\widehat{\Delta} \times \widehat{\Delta}$.

Proposition 2.5.5. *La catégorie $\widehat{\Delta} \times \widehat{\Delta}$ admet une structure de catégorie de modèles dans laquelle*

- *les équivalences faibles sont les morphismes $f: K \rightarrow K'$ tels que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $f_{m,\bullet}: K_{m,\bullet} \rightarrow K'_{m,\bullet}$ est une équivalence faible de $\widehat{\Delta}$,*
- *les fibrations sont les morphismes $f: K \rightarrow K'$ tels que pour tout $m \in \mathbb{N}$, la flèche induite $w_m(f): K_{m,\bullet} \rightarrow K'_{m,\bullet} \times_{M_m K'} M_m K$ est une fibration,*
- *les cofibrations sont les morphismes $f: K \rightarrow K'$ tels que pour tout $m \in \mathbb{N}$, la flèche induite $v_m(f): L_m K' \sqcup_{L_m K} K_{m,\bullet} \rightarrow K'_{m,\bullet}$ est une cofibration.*

Preuve. La proposition [Lur09, Appendice 2.9.19] prouve le cas général d'une catégorie $\mathcal{C}^J$ où J est une petite catégorie de Reedy et $\mathcal{C}$ une catégorie de modèles quelconque. $\square$

TERMINOLOGIE 2.5.6. La structure de catégorie de modèles de la proposition 2.5.5 est appelée *structure de Reedy* sur $\widehat{\Delta} \times \widehat{\Delta}$. Une (co)fibration de cette structure sera parfois appelée *(co)fibration de Reedy*.

Les définitions de L_m et M_m , et donc celle des fibrations et cofibrations de Reedy, peuvent sembler absconces. On va voir qu'on peut en donner une description plus simple. Commençons par le foncteur L_m . Tout d'abord, la catégorie $(i_{L,m}^\circ \downarrow [m])$ est isomorphe à la catégorie $\partial_m \Delta_L^\circ$, où $\partial_m \Delta_L$ est la sous-catégorie pleine de $[_m] \backslash \Delta_L$ contenant tous les objets sauf $([m], \mathbf{1}_{[m]})$. L'ensemble simplicial $L_m K$ est donc la colimite du diagramme $K: \partial_m \Delta_L^\circ \rightarrow \widehat{\Delta}$. Ce dernier étant à valeurs dans la catégorie de préfaisceaux $\widehat{\Delta}$, sa colimite se calcule point par point : autrement dit, $L_m K$ est l'ensemble simplicial

$$[n] \mapsto \operatorname{colim}_{\partial_m \Delta_L^\circ} (K_{\bullet,n}).$$

Lemme 2.5.7. *Soit X un ensemble simplicial. Alors*

$$\operatorname{colim}_{\partial_m \Delta_L^\circ} (X) \simeq \operatorname{colim}_{([m] \setminus (\Delta_{<m}))^\circ} (X).$$

Preuve. L'inclusion $i: \partial_m \Delta_L \hookrightarrow [m] \setminus (\Delta_{<m})$ induit une flèche canonique

$$\operatorname{colim}_{\partial_m \Delta_L^\circ} (X) \rightarrow \operatorname{colim}_{([m] \setminus (\Delta_{<m}))^\circ} (X).$$

Pour montrer qu'elle est surjective, il suffit de montrer que pour toute flèche $[m] \rightarrow [k]$ avec $k < m$, il existe une surjection $[m] \twoheadrightarrow [k']$ avec $k' < m$ et une flèche $[k'] \rightarrow [k]$ tel que commute le triangle

$$\begin{array}{ccc} [m] & \twoheadrightarrow & [k'] \\ \downarrow & \swarrow & \\ [k] & & \end{array}$$

La factorisation canonique de $[m] \rightarrow [k]$ (en tant qu'application ensembliste) convient. Pour montrer qu'elle est injective, il suffit de voir que pour toute flèche $[m] \rightarrow [k]$ avec $k < m$, il existe une chaîne

$$a_0 \rightarrow a_1 \leftarrow a_2 \rightarrow \cdots \leftarrow a_n$$

pour tout couple (a_0, a_n) d'objets de la catégorie $(i \downarrow [m] \rightarrow [k])$. La factorisation canonique de $[m] \rightarrow [k]$ est par définition un objet initial de cette catégorie, ce qui suffit. $\square$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $(L_m K)_n$ est ainsi la colimite sur $([m] \setminus (\Delta_{<m}))^\circ$ du diagramme $K_{\bullet, n}$, i.e. est exactement $(\operatorname{sk}_{m-1} K_{\bullet, n})_m$. Notons $r^\otimes: \widehat{\Delta} \rightarrow \operatorname{Set}$ l'évaluation $K \mapsto K_r$ pour tout $r \in \mathbb{N}$. La transformation naturelle $\lambda_{m, n}: n^\otimes L_m \rightarrow n^\otimes m^*$ induite par λ_m en degré n n'est alors rien d'autre que l'inclusion naturelle $m^\otimes \operatorname{sk}_{m-1} \rightarrow m^\otimes$ induite par la coïunité $\operatorname{sk}_{m-1} \rightarrow \mathbf{1}_{\widehat{\Delta}}$ en degré m .

REMARQUE 2.5.8. Le lemme 2.5.7 est en fait un cas particulier d'un fait bien plus général. Un foncteur $u: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ est dit *final* si le morphisme canonique de foncteurs

$$\operatorname{colim}_{\mathcal{A}} \circ u^* \rightarrow \operatorname{colim}_{\mathcal{B}}$$

est un isomorphisme. On a alors la caractérisation suivante des foncteurs finaux : un foncteur $u: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ est final si et seulement si, pour tout objet b de $\mathcal{B}$, la catégorie ${}_b \setminus \mathcal{A}$ est 0-connexe (i.e. non vide et connexe).

Dans le cas particulier du lemme 2.5.7, le foncteur u est l'inclusion pleine $\partial_m \Delta_L^\circ \hookrightarrow ([m] \setminus (\Delta_{<m}))^\circ$. Et pour tout objet $b: [m] \rightarrow [k]$, la preuve s'applique à montrer que la catégorie $(u^\circ \downarrow b)$ (qui est la catégorie opposée à ${}_b \setminus \mathcal{A}$) est non vide et contractile, donc en particulier 0-connexe.

Passons maintenant au foncteur M_m . La catégorie $([m] \downarrow i_{R, m}^\circ)$ est isomorphe à la catégorie $\partial_m \Delta_R^\circ$, où $\partial_m \Delta_R$ est la sous-catégorie pleine de $\Delta_{R/[m]}$ contenant tous les objets sauf $([m], \mathbf{1}_{[m]})$. Étant donné un ensemble bisimplicial K , la limite du

diagramme induit $K : \partial_m \Delta_R^\circ \rightarrow \widehat{\Delta}$ se calcule point par point : l'ensemble simplicial $M_m K$ est donné par

$$[n] \mapsto \lim_{\partial_m \Delta_R^\circ} (K_{\bullet, n}).$$

Pour un entier $n \in \mathbb{N}$, identifiant $K_{r, n}$ avec $\text{Hom}_{\widehat{\Delta}}(\Delta[r], K_{\bullet, n})$, l'ensemble $(M_m K)_n$ est la limite sur $\partial_m \Delta_R^\circ$ du diagramme $([r] \leftarrow [m]) \mapsto \text{Hom}_{\widehat{\Delta}}(\Delta[r], K_{\bullet, n})$: toute injection $[r] \rightarrow [m]$ se factorisant par une des δ_m^j , cette limite est l'ensemble $\text{Hom}_{\widehat{\Delta}}(\partial \Delta[m], K_{\bullet, n})$.

La description explicite de L_m mène à une caractérisation simple des cofibrations de Reedy. Commençons par les lemmes suivants.

Lemme 2.5.9. *Soient $f : K \rightarrow K'$ une morphisme d'ensemble simpliciaux et $m \geq 0$. Si f_m est injective, alors pour tout m -simplexe x de K , $f_m(x)$ est dégénéré si et seulement si x l'est.*

Preuve. Soit $x \in K_m$. Si x est dégénéré, il est clair que $f_m(x)$ également (indépendamment de l'injectivité de f_m). Réciproquement, supposons que $f_m(x)$ est dégénéré : il existe une surjection $\tau : [m] \twoheadrightarrow [k]$ et $y \in K'_k$ tel que $f_m(x) = K'(\tau)(y)$. Remarquons alors que τ , étant surjective, admet une section $\sigma : [k] \rightarrow [m]$. Ainsi,

$$y = K'(\tau\sigma)(y) = K'(\sigma)(f_m(x)) = f_m(K(\sigma)(x)).$$

Si l'on montre que $K(\tau)(K(\sigma)(x)) = x$, alors x est bien dégénéré. Par injectivité de f_m , il suffit de montrer l'égalité sur les images :

$$f_m(K(\tau)(K(\sigma)(x))) = K(\tau)(f_m(K(\sigma)(x))) = K(\tau)(y) = f_m(x).$$

□

Lemme 2.5.10. *Un morphisme $f : K \rightarrow K'$ d'ensembles simpliciaux est un monomorphisme si et seulement si, pour tout $m \in \mathbb{N}$, le carré commutatif d'ensembles*

$$\begin{array}{ccc} (\text{sk}_{m-1} K)_m & \longrightarrow & K_m \\ (\text{sk}_{m-1} f)_m \downarrow & & \downarrow f_m \\ (\text{sk}_{m-1} K')_m & \longrightarrow & K'_m \end{array}$$

induit une application $\tilde{f}_m : (\text{sk}_{m-1} K')_m \sqcup_{(\text{sk}_{m-1} K)_m} K_m \rightarrow K'_m$ injective.

Preuve. Rappelons tout d'abord que le morphisme $f : K \rightarrow K'$ est un monomorphisme si et seulement si chaque $f_m : K_m \rightarrow K'_m$ est une injection. En effet, f est un monomorphisme si et seulement si le carré

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{1_K} & K \\ 1_K \downarrow & & \downarrow f \\ K & \xrightarrow{f} & K' \end{array}$$

est cartésien. Les limites de $\widehat{\Delta}$ se calculant point par point, on a l'équivalence annoncée.

On montre tout d'abord que si f est un monomorphisme, alors $\tilde{f}_m$ est injective pour tout $m \in \mathbb{N}$. Pour un carré commutatif d'ensembles constitué d'inclusions

$$\begin{array}{ccc} A & \hookrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \hookrightarrow & D, \end{array}$$

la flèche induite $C \sqcup_A B \rightarrow D$ est injective si et seulement si $B \cap C = A$. Dans notre situation, on dispose d'une inclusion $K \subseteq K'$ d'ensembles simpliciaux (en identifiant f à une inclusion point par point). Aussi s'agit-il de montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, un m -simplexe de K est dégénéré en tant qu'élément de K'_m si et seulement si il l'est en tant qu'élément de K_m . Il suffit d'appliquer le lemme 2.5.9 en chaque degré $m \geq 0$.

Réciproquement, on va montrer que si $\tilde{f}_m$ est injective pour tout m , alors f est un monomorphisme. Tous les 0-simplexes de n'importe quel ensemble simplicial étant non dégénérés, le diagramme de l'énoncé pour $m = 0$ est

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \hookrightarrow & K_0 \\ \downarrow & & \downarrow f_0 \\ \emptyset & \hookrightarrow & K'_0. \end{array}$$

La flèche f_0 s'identifie alors à la flèche induite $\tilde{f}_0$, injective par hypothèse. On raisonne alors par récurrence : soit $m > 0$ et supposons f_k injective pour tout $k < m$. Dans le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} (\text{sk}_{m-1}K)_m & \xrightarrow{\quad} & K_m & & \\ (\text{sk}_{m-1}f)_m \downarrow & & \downarrow i_m & \searrow f_m & \\ (\text{sk}_{m-1}K')_m & \xrightarrow{j_m} & (\text{sk}_{m-1}K')_m \sqcup_{(\text{sk}_{m-1}K)_m} K_m & \xrightarrow{\tilde{f}_m} & K'_m \\ & \searrow & & & \uparrow \\ & & & & K'_m \end{array}$$

l'injectivité de $\tilde{f}_m$ assure que f_m est injective si et seulement si i_m l'est. De plus, dans Set, les images directes respectent les monomorphismes : il suffit donc de montrer que $(\text{sk}_{m-1}f)_m$ est injective. Soient $x_0, x_1 \in K_m$ deux m -simplexes dégénérés tels que $f_m(x_0) = x' = f_m(x_1)$. Les simplexes x_i étant dégénérés, il existe deux épimorphismes $h_i : [m] \rightarrow [k_i]$ dans Δ avec $k_i < m$ et deux simplexes $y_i \in K_{k_i}$ tels que $x_i = K(h_i)(y_i)$. Le lemme d'Eilenberg-Zilber ([GZ67, II.3.1]) permet de prendre y_0 et y_1 non dégénérés. Alors le m -simplexe dégénéré x' de K' s'écrit

$$x' = K'(h_i)(f_{k_i}(y_i)) \quad \forall i \in \{0, 1\}.$$

Mais le lemme 2.5.9 montre que les simplexes $f_{k_i}(y_i)$ sont non dégénérés dans K' : f_{k_i} étant injective par hypothèse de récurrence, si $f_{k_i}(z)$ est dégénéré dans K' ,

le simplexe z l'est déjà comme simplexe de K . L'unicité dans le lemme de Eilenberg-Zilber (appliqué au simplexe x' de K') permet alors de conclure : $k_0 = k_1$, $h_0 = h_1$ et $y_0 = y_1$, donc en particulier $x_0 = x_1$. $\square$

Corollaire 2.5.11. *Les cofibrations de Reedy de $\widehat{\Delta \times \Delta}$ sont exactement les monomorphismes.*

Preuve. Par définition, une cofibration de Reedy est un morphisme $f : K \rightarrow K'$ induisant, pour tout $m \in \mathbb{N}$, une cofibration $v_m(f) : L_m K' \sqcup_{L_m K} K_{m,\bullet} \rightarrow K'_{m,\bullet}$ de $\widehat{\Delta}$. Or une cofibration de $\widehat{\Delta}$ est un monomorphisme (cf. 2.5.2). Ainsi, f est une cofibration de Reedy si et seulement si $(v_m(f))_n$ est injective pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$. Les colimites de $\widehat{\Delta}$ étant calculées point par point, l'application $(v_m(f))_n$ est canoniquement isomorphe à la flèche $(L_m K')_n \sqcup_{(L_m K)_n} K_{m,n} \rightarrow K'_{m,n}$ induite par le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} (L_m K)_n & \longrightarrow & K_{m,n} \\ (L_m f)_n \downarrow & & \downarrow f_{m,n} \\ (L_m K')_n & \longrightarrow & K'_{m,n}. \end{array}$$

La description de $(L_m K)_n$ comme l'ensemble $(\text{sk}_{m-1} K_{\bullet,n})_m$ et le lemme 2.5.10 permet de conclure : $f : K \rightarrow K'$ est une cofibration de Reedy si et seulement si $f_{\bullet,n} : K_{\bullet,n} \rightarrow K'_{\bullet,n}$ est un monomorphisme pour tout $n \in \mathbb{N}$, i.e. si et seulement si f est un monomorphisme. $\square$

REMARQUE 2.5.12. Le lecteur familier des catégories de modèles, et notamment des structures de catégories de modèles sur une catégorie de diagrammes à valeurs dans une catégorie de modèles **combinatoire**, remarquera que la structure de Reedy sur $\widehat{\Delta \times \Delta} \simeq \widehat{\Delta}^{(\Delta^\circ)}$ coïncide avec la structure injective. En effet, sur une catégorie donnée, il ne peut exister qu'une seule structure de catégorie de modèles admettant des équivalences faibles et cofibrations fixées (cf. proposition 2.4.4).

On peut maintenant décrire plus simplement la structure de Reedy sur $\widehat{\Delta \times \Delta}$.

Proposition 2.5.13. *La structure de catégorie de modèles de Reedy sur $\widehat{\Delta \times \Delta}$ admet la description suivante :*

- les équivalences faibles sont les flèches $f : K \rightarrow K'$ telles que $f_{m,\bullet} : K_{m,\bullet} \rightarrow K'_{m,\bullet}$ est une équivalence faible simpliciale pour tout $m \in \mathbb{N}$,
- les cofibrations sont les monomorphismes,
- les fibrations sont les flèches $f : K \rightarrow K'$ telles que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, le morphisme induit

$$w_m(f) : K_{m,\bullet} \rightarrow K'_{m,\bullet} \times_{M_m K'} M_m K$$

est une fibration de Kan.

Localisateur fondamental minimal

Dans ce chapitre, on aborde enfin la preuve de la conjecture de Grothendieck énoncée en introduction. Une première observation très simple est la suivante : l'intersection d'une famille quelconque de localisateur fondamentaux est encore un localisateur fondamental. On définit donc le *localisateur fondamental minimal* comme l'intersection de tous les localisateurs fondamentaux. La conjecture de Grothendieck s'énonce alors comme suit.

Théorème (Cisinski). *Le localisateur fondamental minimal est l'ensemble $\mathcal{W}_\infty$ des ∞ -équivalences.*

Dans la première partie de ce chapitre, on montre que quelque soit la notion d'équivalence faible de Cat définie par un localisateur fondamental $\mathcal{W}$, les ∞ -équivalences en sont toujours. Autrement dit, $\mathcal{W}_\infty$ est inclus dans tout localisateur fondamental (donc dans le minimal). Pour ce faire, on prouve d'abord un théorème de Grothendieck : étant donné un localisateur fondamental de Cat, dans une catégorie de préfaisceaux $\widehat{\mathcal{A}}$, l'ensemble des monomorphismes $f : P \hookrightarrow Q$ induisant une équivalence faible $\mathcal{A}_{/P} \rightarrow \mathcal{A}_{/Q}$ est stable par images directes et compositions tranfinies. Ce sera le résultat clé dans la preuve de l'inclusion de $\mathcal{W}_\infty$ dans tout localisateur fondamental.

La deuxième partie, quant à elle, est dédiée à montrer que $\mathcal{W}_\infty$ est un localisateur fondamental. Les propriétés **LF1** et **LF2** sont quasiment immédiates et on passera très rapidement à la propriété **LF3**, qui est ici le théorème A (relatif) de Quillen. La preuve fera un usage intensif des structures de catégories de modèles posées sur $\widehat{\Delta}$ et $\widehat{\Delta \times \Delta}$. En particulier, on exploitera un foncteur colimite homotopique, qu'on décrira explicitement.

3.1 Les ∞ -équivalences comme équivalences faibles

Étant donnée une petite catégorie $\mathcal{A}$, on a un foncteur $i_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \text{Cat}$ défini par $a \mapsto \mathcal{A}_{/a}$ sur les objets et par

$$(f : a \rightarrow a') \mapsto \left((b \xrightarrow{p} a) \mapsto (b \xrightarrow{p} a \xrightarrow{f} a') \right)$$

sur les flèches de $\mathcal{A}$.

La catégorie Cat étant cocomplète, on a une extension de Kan à gauche le long du plongement de Yoneda (cf. proposition 2.1.5)

$$\text{Lan } i_{\mathcal{A}} : \widehat{\mathcal{A}} \rightarrow \text{Cat}$$

qu'on notera encore $i_{\mathcal{A}}$ pour plus de simplicité (il n'y a pas de risque à le faire puisque $\text{Lan } i_{\mathcal{A}} \circ \mathfrak{h}_{-}^{\mathcal{A}} = i_{\mathcal{A}}$). De plus, on sait que $i_{\mathcal{A}} : \widehat{\mathcal{A}} \rightarrow \text{Cat}$ admet alors un adjoint à droite donné par

$$i_{\mathcal{A}}^* : \mathcal{B} \mapsto \text{Hom}_{\text{Cat}}(\mathcal{A}_{/-}, \mathcal{B}).$$

Ce qui donne en particulier la proposition suivante.

Proposition 3.1.1. *Le foncteur $i_{\mathcal{A}} : \widehat{\mathcal{A}} \rightarrow \text{Cat}$ commute aux colimites.*

Détaillons un peu le foncteur $i_{\mathcal{A}}$. Pour un préfaisceau P , la proposition 2.1.5 donne

$$i_{\mathcal{A}}(P) = \text{colim}_{\mathcal{A}_{/P}} \left(\mathcal{A}_{/P} \rightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{i_{\mathcal{A}}} \text{Cat} \right).$$

Cette colimite est la catégorie $\mathcal{A}_{/P}$ elle-même. En effet, posons pour toute section $x : \mathfrak{h}_a \rightarrow P$ le foncteur

$$\iota_x : \mathcal{A}_{/a} \rightarrow \mathcal{A}_{/P}, \quad \left(a' \xrightarrow{f} a \right) \mapsto \left(\mathfrak{h}_{a'} \xrightarrow{\mathfrak{h}_f} \mathfrak{h}_a \xrightarrow{x} P \right).$$

Alors $\iota = (\iota_x)_{x \in \mathcal{A}_{/P}}$ est tautologiquement un cocône sur le diagramme considéré. Il reste à montrer son universalité : pour tout cocône $\kappa = (\kappa_x : \mathcal{A}_{/a} \rightarrow \mathcal{B})_{x : \mathfrak{h}_a \rightarrow P}$, le foncteur

$$\mathcal{A}_{/P} \rightarrow \mathcal{B}, \quad (x : \mathfrak{h}_a \rightarrow P) \mapsto \kappa_x(a, \mathbf{1}_a)$$

factorise le cocône κ à travers ι . Finalement, le foncteur $i_{\mathcal{A}} : \widehat{\mathcal{A}} \rightarrow \text{Cat}$ est le foncteur

$$P \mapsto \mathcal{A}_{/P}, \quad \left(P \xrightarrow{\alpha} Q \right) \mapsto \left(\alpha \circ - : \mathcal{A}_{/P} \rightarrow \mathcal{A}_{/Q} \right).$$

On donne ici un lemme qui nous servira par la suite. (Attention : la preuve fait implicitement appel au lemme de Yoneda en identifiant systématiquement les éléments de $P(a)$ et les sections $\mathfrak{h}_a \rightarrow P$ pour un préfaisceau P sur $\mathcal{A}$.)

Lemme 3.1.2. *Pour toute petite catégorie $\mathcal{A}$ et tout préfaisceau P sur $\mathcal{A}$, on a un isomorphisme de catégories entre $\widehat{\mathcal{A}_{/P}}$ et $\widehat{\mathcal{A}}_{/P}$.*

Preuve. Soit $F : \widehat{\mathcal{A}_{/P}} \rightarrow \widehat{\mathcal{A}}_{/P}$ le foncteur qui, à un préfaisceau $\tilde{Q}$ sur $\mathcal{A}_{/P}$, associe le morphisme $\alpha : Q \rightarrow P$ de $\widehat{\mathcal{A}}$ où

$$Q : a \mapsto \coprod_{x : \mathfrak{h}_a \rightarrow P} \tilde{Q}(x)$$

et où $\alpha(a)$ est pour tout objet a la flèche induite par les flèches constantes $\tilde{Q}(x) \rightarrow P(a)$ de valeurs x .

Alors F admet un quasi inverse, à savoir le foncteur $G : \widehat{\mathcal{A}}_{/P} \rightarrow \widehat{\mathcal{A}_{/P}}$ défini pour tout morphisme $\alpha : Q \rightarrow P$ par

$$G \left(Q \xrightarrow{\alpha} P \right) : (x : \mathfrak{h}_a \rightarrow P) \mapsto \alpha(a)^{-1}(\{x\}).$$

□

On rappelle qu'on dispose d'un foncteur nerf $N: \text{Cat} \rightarrow \widehat{\Delta}$ défini par

$$N\mathcal{A}: [n] \mapsto \text{Hom}_{\text{Cat}}([n], \mathcal{A}).$$

En le composant par le foncteur $i_{\Delta}: \widehat{\Delta} \rightarrow \text{Cat}$ défini comme ci-dessus, on obtient un endofoncteur

$$i_{\Delta} \circ N: \text{Cat} \rightarrow \text{Cat}, \quad \mathcal{A} \mapsto \Delta_{/N\mathcal{A}}.$$

Par abus, on notera plutôt $\Delta_{/\mathcal{A}}$ pour $\Delta_{/N\mathcal{A}}$.

Pour toute petite catégorie $\mathcal{A}$, on pose le foncteur $\alpha_{\mathcal{A}}: \Delta_{/\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{A}$ défini sur les objets par $\alpha_{\mathcal{A}}(x: \Delta[n] \rightarrow \mathcal{A}) = x(n)$ et sur les morphismes $f: x \rightarrow x'$ avec $x: \Delta[n] \rightarrow \mathcal{A}$ et $x': \Delta[m] \rightarrow \mathcal{A}$ par $\alpha_{\mathcal{A}}(f) = x'(f(n) \rightarrow m)$. Autrement dit, dans la catégorie $\Delta_{/\mathcal{A}}$ dont les objets sont les diagrammes linéaires finis de $\mathcal{A}$, le foncteur $\alpha_{\mathcal{A}}$ focalise sur le « bout du diagramme ». De plus, on voit facilement que la famille $\alpha = (\alpha_{\mathcal{A}})_{\mathcal{A} \in \text{Ob Cat}}$ est une transformation naturelle $i_{\Delta} \circ N \rightarrow \mathbf{1}_{\text{Cat}}$.

Un théorème de Grothendieck. Soit $\mathcal{J}$ une petite catégorie. En section 1.3, on a construit un foncteur d'intégration $\int: \text{Cat}^{\mathcal{J}} \rightarrow \text{Cat}$, associant à tout foncteur $F: \mathcal{J} \rightarrow \text{Cat}$ une catégorie $\int F$ op-fibrée au-dessus de $\mathcal{J}$, via une op-fibration de Grothendieck $\vartheta_F: \int F \rightarrow \mathcal{J}$, et dont la fibre en $i \in \text{Ob } \mathcal{J}$ est $F(i)$. Dualelement, on a un foncteur de cointégration

$$\nabla: \text{Cat}^{(\mathcal{J}^{\circ})} \rightarrow \text{Cat}$$

associant à tout foncteur $F: \mathcal{J}^{\circ} \rightarrow \text{Cat}$ la catégorie

$$\nabla F = \left(\int \left(\mathcal{J}^{\circ} \xrightarrow{F} \text{Cat} \xrightarrow{\circ} \text{Cat} \right) \right)^{\circ}$$

fibrée au-dessus de $\mathcal{J}$, et dont la fibre en $i \in \text{Ob } \mathcal{J}$ est $F(i)$. C'est-à-dire que la catégorie ∇F est la catégorie dont

- les objets sont les couples (i, a) avec $i \in \text{Ob } \mathcal{J}$ et $a \in \text{Ob } F(i)$,
- les morphismes $(i, a) \rightarrow (i', a')$ sont les couples (k, f) avec $k: i \rightarrow i'$ une flèche de $\mathcal{J}$ et $f: a \rightarrow F(k)(a')$ une flèche de $F(i)$,

la composition étant donnée par $(k', f') \circ (k, f) = (k'k, F(k')(f')f)$. On notera $\zeta_F: \nabla F \rightarrow \mathcal{J}$ la fibration de Grothendieck associée (i.e. le foncteur opposé à la op-fibration $\vartheta_{-\circ F}$).

Soient maintenant $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux petites catégories et $F: \mathcal{A}^{\circ} \times \mathcal{B} \rightarrow \text{Cat}$ un foncteur. On va construire des foncteurs d'intégration et de cointégration termes à termes. Pour tout objet a de $\mathcal{A}$, on a un foncteur

$$j_a: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}^{\circ} \times \mathcal{B}, \quad b \mapsto (a, b), \quad (f: b \rightarrow b') \mapsto (\mathbf{1}_a, f).$$

On étend facilement $a \mapsto j_a$ en un foncteur $j: \mathcal{A}^{\circ} \rightarrow (\mathcal{A}^{\circ} \times \mathcal{B})^{\mathcal{B}}$ en envoyant une flèche $f: a \rightarrow a'$ de $\mathcal{A}$ sur la transformation naturelle $((f, \mathbf{1}_b): (a, b) \mapsto (a', b))_{b \in \text{Ob } \mathcal{B}}$. Ceci définit le foncteur d'intégration terme à terme

$$\int_{\mathcal{B}} F: \mathcal{A}^{\circ} \xrightarrow{j} (\mathcal{A}^{\circ} \times \mathcal{B})^{\mathcal{B}} \xrightarrow{F \circ -} \text{Cat}^{\mathcal{B}} \xrightarrow{\int} \text{Cat}.$$

De même, on a un foncteur $k: \mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{A}^\circ \times \mathcal{B})^{(\mathcal{A}^\circ)}$, associant à tout b le foncteur $k_b: a \mapsto (a, b)$, qui induit le foncteur de *cointégration terme à terme*

$$\nabla_{\mathcal{A}^\circ} F: \mathcal{B} \xrightarrow{k} (\mathcal{A}^\circ \times \mathcal{B})^{(\mathcal{A}^\circ)} \xrightarrow{F \circ -} \text{Cat}^{(\mathcal{A}^\circ)} \xrightarrow{\nabla} \text{Cat}.$$

Si l'on note abusivement $\mathcal{A}: \mathcal{B} \rightarrow \text{Cat}$ et $\mathcal{B}: \mathcal{A}^\circ \rightarrow \text{Cat}$ les foncteurs constants de valeur respective $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, on a deux transformations naturelles

$$\vartheta_F^{\mathcal{B}}: \int_{\mathcal{B}} F \rightarrow \mathcal{B} \quad \text{et} \quad \zeta_F^{\mathcal{A}^\circ}: \nabla_{\mathcal{A}^\circ} F \rightarrow \mathcal{A}$$

définies respectivement par la op-fibration $\vartheta_{F \circ j_a}$ et la fibration $\zeta_{F \circ k_b}$ en tout point. Appliquant le foncteur $\nabla: \text{Cat}^{(\mathcal{A}^\circ)} \rightarrow \text{Cat}$ à la flèche $\vartheta_F^{\mathcal{B}}$ d'une part et le foncteur $\int: \text{Cat}^{\mathcal{B}} \rightarrow \text{Cat}$ à la flèche $\zeta_F^{\mathcal{A}^\circ}$ d'autre part, on obtient deux flèches de Cat

$$\nabla \vartheta_F^{\mathcal{B}}: \nabla \left(\int_{\mathcal{B}} F \right) \rightarrow \nabla \mathcal{B} \quad \text{et} \quad \int \zeta_F^{\mathcal{A}^\circ}: \int (\nabla_{\mathcal{A}^\circ} F) \rightarrow \int \mathcal{A}.$$

Les descriptions données pour l'intégration et la cointégration assurent que $\nabla \mathcal{B}$ et $\int \mathcal{A}$ sont isomorphes à $A \times B$. Elles donnent également des descriptions

- de $\nabla \int_{\mathcal{B}} F$ comme la catégorie dont les objets sont les triplets (a, b, x) avec a objet de $\mathcal{A}$, b objet de $\mathcal{B}$ et x objet de $F(a, b)$, et dont les flèches de la forme $(a, b, x) \rightarrow (a', b', x')$ sont les triplets (h, ℓ, f) avec $h: a \rightarrow a'$ flèche de $\mathcal{A}$, $\ell: b \rightarrow b'$ flèche de $\mathcal{B}$ et $f: (F \circ j_a)(\ell)(x) \rightarrow (F \circ k_{b'})(h)(x')$ flèche de $F(a, b')$,
- de $\int \nabla_{\mathcal{A}^\circ} F$ comme la catégorie dont les objets sont les triplets (b, a, x) avec b objet de $\mathcal{B}$, a objet de $\mathcal{A}$ et x objet de $F(a, b)$, et dont les flèches de la forme $(b, a, x) \rightarrow (b', a', x')$ sont les triplets (ℓ, h, f) avec $\ell: b \rightarrow b'$ flèche de $\mathcal{B}$, $h: a \rightarrow a'$ flèche de $\mathcal{A}$ et $f: (F \circ j_a)(\ell)(x) \rightarrow (F \circ k_{b'})(h)(x')$ flèche de $F(a, b')$.

Le foncteur $\nabla \int_{\mathcal{B}} F \rightarrow \int \nabla_{\mathcal{A}^\circ} F$ défini par

$$(a, b, x) \mapsto (b, a, x), \quad (h, \ell, f) \mapsto (\ell, h, f)$$

est donc un isomorphisme de catégories faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \nabla \int_{\mathcal{B}} F & \xrightarrow{\sim} & \int \nabla_{\mathcal{A}^\circ} F \\ & \searrow \nabla \vartheta_F^{\mathcal{B}} & \swarrow \int \zeta_F^{\mathcal{A}^\circ} \\ & A \times B. & \end{array}$$

Revenons au cas d'une petite catégorie $\mathcal{I}$. Un foncteur $F: \mathcal{I} \rightarrow \text{Cat}$ est un petit diagramme dans la catégorie cocomplète Cat , donc admet une colimite. Notons $\varepsilon_i: F(i) \rightarrow \text{colim}_{\mathcal{I}}(F)$ les flèches du cocône défini par la colimite. On peut alors définir un foncteur

$$K_F: \int F \rightarrow \text{colim}_{\mathcal{I}}(F)$$

par $(i, a) \mapsto \varepsilon_i(a)$ sur les objets, et associant à toute flèche $(k, f): (i, a) \rightarrow (i', a')$ la flèche $\varepsilon_{i'}(f): \varepsilon_i \circ F(k)(a) \rightarrow \varepsilon_{i'}(a')$ de $\text{colim}_{\mathcal{I}}(F)$.

Lemme 3.1.3. Soient $\mathcal{I}$ et $\mathcal{A}$ deux petites catégories. Pour tout foncteur $F: \mathcal{I} \rightarrow \widehat{\mathcal{A}}$, le foncteur

$$K_{i_{\mathcal{A}}F}: \int i_{\mathcal{A}}F \rightarrow \operatorname{colim}_{\mathcal{I}} (i_{\mathcal{A}}F)$$

est une fibration de Grothendieck.

Preuve. Commençons par montrer le résultat dans le cas particulier où $\operatorname{colim}_{\mathcal{I}}(F)$ est le préfaisceau final sur $\mathcal{A}$. Comme $i_{\mathcal{A}}$ commute aux colimites (cf. proposition 3.1.1), on a

$$\operatorname{colim}_{\mathcal{I}} (i_{\mathcal{A}}F) \simeq i_{\mathcal{A}} \left(\operatorname{colim}_{\mathcal{I}}(F) \right) \simeq \mathcal{A}.$$

Sous le dernier isomorphisme, les flèches ε_i s'identifient aux foncteurs d'oubli $\mathcal{A}_{/F(i)} \rightarrow \mathcal{A}$. Le foncteur $K_{i_{\mathcal{A}}F}$ s'identifie alors à

$$(i, x: \mathfrak{h}_a \rightarrow F(i)) \mapsto a, \quad (k, f: a \rightarrow a') \mapsto f.$$

En outre, l'adjonction $\mathcal{A}^\circ \times -: \operatorname{Cat} \rightleftarrows \operatorname{Cat} : -^{\mathcal{A}^\circ}$ permet de considérer le foncteur F comme un foncteur $\mathcal{A}^\circ \times \mathcal{I} \rightarrow \operatorname{Set}$, puis, le postcomposant implicitement avec le foncteur catégorie discrète, comme un foncteur $\mathcal{A}^\circ \times \mathcal{I} \rightarrow \operatorname{Cat}$. Sous cette identification, la fibration de Grothendieck $\nabla \int_{\mathcal{I}} F \rightarrow \mathcal{A} \times \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{A}$ n'est autre que $K_{i_{\mathcal{A}}F}$.

Revenons maintenant au cas général, i.e. $G = \operatorname{colim}_{\mathcal{I}}(F)$ est quelconque. Le foncteur F induit un foncteur

$$\tilde{F}: \mathcal{I} \rightarrow \widehat{\mathcal{A}_{/G}} \simeq \widehat{\mathcal{A}_{/G}}$$

de colimite le préfaisceau terminal sur $\mathcal{A}_{/G}$. On sait alors que $K_{i_{\mathcal{A}_{/G}}\tilde{F}}$ est une fibration de Grothendieck. Or ce dernier foncteur

$$K_{i_{\mathcal{A}_{/G}}\tilde{F}}: \int i_{\mathcal{A}_{/G}}\tilde{F} \rightarrow \operatorname{colim}_{\mathcal{I}} (i_{\mathcal{A}_{/G}}\tilde{F}) \simeq i_{\mathcal{A}_{/G}} \operatorname{colim}_{\mathcal{I}} (\tilde{F}) \simeq \mathcal{A}_{/G} = i_{\mathcal{A}} \operatorname{colim}_{\mathcal{I}}(F)$$

n'est autre que $K_{i_{\mathcal{A}}F}$, qui est donc une fibration de Grothendieck. $\square$

On pose désormais un localisateur fondamental $\mathcal{W}$. Dans le reste de la section, « équivalence faible » désignera donc les éléments de $\mathcal{W}$.

Lemme 3.1.4. Dans les hypothèses du lemme précédent, si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

- (i) $\mathcal{I}$ est la catégorie associée à l'ensemble partiellement ordonné $\{1 > 0 < 2\}$, et $F(0) \rightarrow F(1)$ est un monomorphisme,
- (ii) $\mathcal{I}$ est la catégorie associée à un ordinal κ , et $F(\alpha) \rightarrow F(\beta)$ est un monomorphisme pour tout $\alpha < \beta < \kappa$,

alors $K_{i_{\mathcal{A}}F}$ est une équivalence faible.

Preuve. Restreignons-nous tout d'abord au cas où $\mathcal{A}$ est la catégorie finale e . D'une part, on a un isomorphisme de catégorie $\widehat{e} \simeq \operatorname{Set}$, et sous cette identification i_e est simplement le foncteur $\operatorname{Set} \rightarrow \operatorname{Cat}$ de discrétisation. Si bien que $\int i_e F$ est ce que l'on a noté $\int F$ dans la section 1.3. D'autre part, comme $K_{i_{\mathcal{A}}F}$ est une fibration, la proposition 1.3.9 (ou plutôt son équivalent sur les fibrations) permettra de conclure si l'on montre que les fibres de $K_{i_{\mathcal{A}}F}$ sont asphériques. Il convient ici de rappeler que

$\int F$ est la catégorie dont les objets sont les couples (i, x) avec $i \in \text{Ob } \mathcal{I}$ et $x \in F(i)$, et dont les morphismes $(i, x) \rightarrow (i', x')$ sont les morphismes $k: i \rightarrow i'$ de $\mathcal{I}$ tels que $F(k)(x) = x'$. Par définition, le foncteur $K_{i_e F}$ associe alors à un objet (i, x) l'objet $\varepsilon_i(x)$ de la catégorie discrète $\text{colim}_{\mathcal{I}}(F)$, et à un morphisme $k: (i, x) \rightarrow (i', x')$ la flèche identité de l'objet $\varepsilon_i(x) = \varepsilon_{i'}(x')$ de $\text{colim}_{\mathcal{I}}(F)$. Notamment, la fibre de $K_{i_e F}$ en z est la sous-catégorie **pleine** de $\int F$ constituée des objets au-dessus de z . Autrement dit, la fibre de $K_{i_e F}$ est la catégorie des éléments du sous-foncteur de F

$$\mathcal{I} \rightarrow \text{Set}, \quad i \mapsto \varepsilon_i^{-1}(z).$$

Commençons par le cas (i). Le foncteur F est alors un diagramme d'ensembles

$$\begin{array}{ccc} F(0) & \xrightarrow{j_2} & F(2) \\ j_1 \downarrow & & \\ & & F(1) \end{array}$$

dont la colimite $\text{colim}_{\mathcal{I}}(F)$ est une somme amalgamée d'ensembles, qu'on sait donc calculer : $\text{colim}_{\mathcal{I}}(F)$ est le quotient de l'union disjointe $F(1) \sqcup F(2)$ par la relation d'équivalence engendrée par $j_1(x) \sim j_2(x)$ pour tout $x \in F(0)$. Notons comme précédemment $\varepsilon_i: F(i) \rightarrow \text{colim}_{\mathcal{I}}(F)$ les flèches canoniques. Dans $\text{colim}_{\mathcal{I}}(F)$, il y a trois sortes d'éléments :

- ceux qui sont dans $\text{im } \varepsilon_1 \setminus \text{im } \varepsilon_2$,
- ceux qui sont dans $\text{im } \varepsilon_2 \setminus \text{im } \varepsilon_1$,
- ceux qui sont dans $\text{im } \varepsilon_0$.

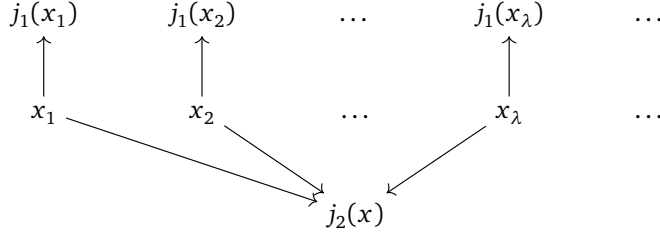
Si $z = \varepsilon_1(x) \notin \text{im } \varepsilon_2$, il a une unique préimage dans $F(1)$ (à savoir x) et n'est atteint par aucun élément de $F(0)$ ou $F(2)$. La fibre en z de $K_{i_e F}$ est alors la catégorie des éléments du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & \emptyset \\ \downarrow & & \\ 1. & & \end{array}$$

Cette fibre est asphérique, puisqu'isomorphe à e . Le cas $z = \varepsilon_2(x) \notin \text{im } \varepsilon_1$ est similaire. Il reste donc à traiter le cas où $z = \varepsilon_0(x)$. La flèche j_1 étant injective, ε_2 l'est aussi : $\varepsilon_2^{-1}(z)$ est le singleton $\{j_2(x)\}$. Toujours par injectivité de j_1 , la restriction de j_1 à $\varepsilon_0^{-1}(z)$ est une bijection. Aussi la fibre de $K_{i_e F}$ en z est-elle la catégorie des éléments du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \varepsilon_0^{-1}(z) & \longrightarrow & 1 \\ j_1 \downarrow & & \\ \varepsilon_1^{-1}(z). & & \end{array}$$

C'est la catégorie



où $\{x_\lambda : \lambda < \kappa\}$ est une énumération ordinaire de l'ensemble $\varepsilon_0^{-1}(z)$. Notons $\mathcal{C}$ cette fibre. La catégorie $\mathcal{C}$ n'a pas d'objet final, mais l'on sent bien que les flèches $x_\lambda \rightarrow j_1(x_\lambda)$ ne jouent pas de rôle dans l'asphéricité de $\mathcal{C}$. Formellement, on note $\mathcal{C}'$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ dont les objets sont les $x_\lambda, \lambda < \kappa$ et $j_2(x)$. L'inclusion $i: \mathcal{C}' \hookrightarrow \mathcal{C}$ admet alors un adjoint à droite $r: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ défini comme l'identité sur $\mathcal{C}'$ et comme $j_1(x_\lambda) \rightarrow x_\lambda$ sur le reste des objets (la définition sur les flèches étant alors la seule possible). En effet l'unité est $\mathbf{1}_{\mathcal{C}'} = r \circ i$ (donc r est en fait une rétraction), et la counité $i \circ r \rightarrow \mathbf{1}_{\mathcal{C}}$ est donnée par

$$ir(x_\lambda) = x_\lambda \xrightarrow{\mathbf{1}_{x_\lambda}} x_\lambda, \quad ir(j_2(x)) = j_2(x) \xrightarrow{\mathbf{1}_{j_2(x)}} j_2(x), \quad ir(j_1(x_\lambda)) = x_\lambda \rightarrow j_1(x_\lambda).$$

En tant qu'adjoint, $i: \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ est une équivalence faible. Comme $\mathcal{C}'$ admet un objet final, elle est asphérique. La propriété **FS2** permet alors de conclure : $\mathcal{C}$ est asphérique.

Montrons maintenant (ii). La catégorie $\mathcal{J}$ est associée à un ordinal κ et le foncteur F est alors un diagramme d'ensembles

$$F(0) \xrightarrow{j_{0,1}} F(1) \xrightarrow{j_{1,2}} \dots F(\lambda) \xrightarrow{j_{\lambda,\lambda+1}} \dots$$

dont la colimite $\text{colim}_{\mathcal{J}}(F)$ est le quotient de l'union disjointe $\coprod_{\lambda < \kappa} F(\lambda)$ par la relation d'équivalence engendrée par $x \sim j_\lambda(x)$ pour tout $x \in F(\lambda)$ et pour tout $\lambda < \kappa$. Remarquons d'abord que, toutes les flèches $j_{\lambda,\lambda'} = F(\lambda < \lambda')$ étant injectives, les ε_λ sont également injectives. Aussi pour $z \in \text{colim}_{\mathcal{J}}(F)$ existe-il un ordinal $\lambda_0 < \kappa$ minimum vérifiant que pour tout $\lambda < \lambda_0$, $\varepsilon_\lambda^{-1}(z) = \emptyset$, et pour tout $\lambda \geq \lambda_0$, $\varepsilon_\lambda^{-1}(z)$ est un singleton. La fibre de $K_{i_{\mathcal{A}}F}$ en z est donc la catégorie des éléments du diagramme

$$\emptyset \xrightarrow{j_{0,1}} \emptyset \xrightarrow{j_{1,2}} \dots \dashrightarrow 1 \xrightarrow{j_{\lambda_0,\lambda_0+1}} 1 \longrightarrow \dots,$$

c'est-à-dire la catégorie associée à l'ensemble ordonné $\{\lambda : \lambda_0 \leq \lambda < \kappa\}$ qui, ayant un objet initial, est asphérique.

Enfin, il reste à montrer que le résultat pour le cas particulier $\mathcal{A} = e$ implique le résultat pour $\mathcal{A}$ quelconque. Comme dans la preuve du lemme 3.1.3, on peut supposer que $\text{colim}_{\mathcal{J}}(F)$ est le préfaisceau final sur $\mathcal{A}$, cas dans lequel on a vu que $K_{i_{\mathcal{A}}F}$ n'est autre que la fibration de Grothendieck $\nabla \int_{\mathcal{J}} F \rightarrow \mathcal{A} \times \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{A}$. Or la projection $\mathcal{A} \times \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{A}$ est une équivalence faible : en effet, la projection opposée $\mathcal{A}^\circ \times \mathcal{J}^\circ \rightarrow \mathcal{A}^\circ$ en est une puisque $\mathcal{J}^\circ$ admet un objet final dans les deux cas (i) et (ii) (cf. 1.2.4), puis on applique le théorème d'auto-dualité 1.3.1. Il suffit donc de montrer que $\nabla \int_{\mathcal{J}} F \rightarrow \mathcal{A} \times \mathcal{J}$ est une équivalence faible. De plus, la cointégration

vérifie une version duale de la propriété 1.3.13 : le foncteur $\nabla: \text{Cat}^{\mathcal{A}^\circ} \rightarrow \text{Cat}$ envoie les équivalences faibles étagées sur des équivalences faibles. Il suffit donc de prouver que le morphisme de foncteur

$$\vartheta_F^{\mathcal{J}}: \int_{\mathcal{J}} F \rightarrow \mathcal{J}$$

est une équivalence faible point par point, c'est-à-dire que la op-fibration de Grothendieck $\vartheta_{F(a,-)}^{\mathcal{J}}: \int F(a,-) \rightarrow \mathcal{J}$ est une équivalence faible pour tout $a \in \text{Ob } \mathcal{A}$. Or, pour $a \in \text{Ob } \mathcal{A}$, $F(a,-)$ est un foncteur $\mathcal{J} \rightarrow \text{Set} \simeq \widehat{\mathcal{E}}$, et, les monomorphismes de $\widehat{\mathcal{A}}$ étant les flèches injectives en tout point,

- dans le cas (i), $F(a, 0) \rightarrow F(a, 1)$ est une injection,
- dans le cas (ii), $F(a, \lambda) \rightarrow F(a, \lambda')$ est une injection pour tout $\lambda < \lambda' < \kappa$.

Aussi $F(a,-)$ relève-t-il du cas particulier déjà traité : $\int F(a,-) \rightarrow \text{colim}_{\mathcal{J}} (F(a,-))$ est une équivalence faible. Les colimites de la catégorie de préfaisceaux $\widehat{\mathcal{A}}$ sont calculées point par point, donc

$$\text{colim}_{\mathcal{J}} (F(a,-)) \simeq \left(\text{colim}_{\mathcal{J}} (F) \right) (a) = 1,$$

la dernière égalité venant de notre réduction au cas où $\text{colim}_{\mathcal{J}} (F)$ est le préfaisceau final. Ainsi, $\int F(a,-)$ est asphérique. Comme $\mathcal{J}$ est aussi asphérique (dans les deux cas (i) et (ii)), tout foncteur $\int F(a,-) \rightarrow \mathcal{J}$ est une équivalence faible, et en particulier la op-fibration $\vartheta_{F(a,-)}^{\mathcal{J}}$. $\square$

Corollaire 3.1.5. Soient $\mathcal{J}$ et $\mathcal{A}$ des petites catégories. Soit $\alpha: F \rightarrow G$ une transformation naturelle entre deux foncteurs $F, G: \mathcal{J} \rightarrow \widehat{\mathcal{A}}$. Si $i_{\mathcal{A}} \alpha$ est une équivalence faible étagée et que l'on est dans l'une des deux situations suivantes :

- $\mathcal{J}$ est la catégorie associée à $\{1 > 0 < 2\}$ et $F(0) \rightarrow F(1)$ et $G(0) \rightarrow G(1)$ sont des monomorphismes,
- $\mathcal{J}$ est la catégorie associée à un ordinal κ et, pour tout $\lambda < \lambda' < \kappa$, $F(\lambda) \rightarrow F(\lambda')$ et $G(\lambda) \rightarrow G(\lambda')$ sont des monomorphismes,

alors la flèche induite $\text{colim}_{\mathcal{J}} (i_{\mathcal{A}} F) \rightarrow \text{colim}_{\mathcal{J}} (i_{\mathcal{A}} G)$ est une équivalence faible.

Preuve. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \int i_{\mathcal{A}} F & \xrightarrow{K_{i_{\mathcal{A}} F}} & \text{colim}_{\mathcal{J}} (i_{\mathcal{A}} F) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \int i_{\mathcal{A}} G & \xrightarrow{K_{i_{\mathcal{A}} G}} & \text{colim}_{\mathcal{J}} (i_{\mathcal{A}} G) \end{array}$$

où les flèches horizontales sont des équivalences faibles par le lemme précédent, et où la flèche verticale de gauche est une équivalence faible par la proposition 1.3.13. La propriété **FS2** assure alors que la flèche verticale de droite en est une aussi. $\square$

Ces lemmes préliminaires étant établis, on va pouvoir énoncer et prouver le théorème de Grothendieck annoncé. On introduit d'abord un peu de vocabulaire.

Définition 3.1.6. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie cocomplète. Une partie $S \subseteq \text{Mor } \mathcal{C}$ est dite

- (i) *stable par images directes* si pour tout carré cocartésien de $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{f} & b \\ \downarrow & & \downarrow \\ c & \xrightarrow{f'} & d, \end{array}$$

$f \in S$ implique $f' \in S$,

- (ii) *stable par compositions transfinies* si pour tout ordinal κ et tout diagramme $F : \kappa \rightarrow \mathcal{C}$, on a la propriété suivante : $F(\lambda < \lambda') \in S$ pour tout $\lambda < \lambda' < \kappa$ implique $F(0) \rightarrow \text{colim}_\kappa(F) \in S$.

Soit $\mathcal{A}$ une petite catégorie. On dit qu'une flèche f de $\widehat{\mathcal{A}}$ est une *cofibration* si f est un monomorphisme et une *équivalence faible* si $i_{\mathcal{A}}(f)$ est une équivalence faible de Cat . Une *cofibration triviale* de $\widehat{\mathcal{A}}$ est une cofibration qui est une équivalence faible.

REMARQUE 3.1.7. Le vocabulaire n'est pas choisi au hasard. En effet, pour tout localisateur fondamental accessible $\mathcal{W}$, et toute petite catégorie $\mathcal{A}$, il existe une structure de catégorie de modèles sur $\widehat{\mathcal{A}}$, appelée *structure de catégorie de modèles de Cisinski*, dont les équivalences faibles sont les éléments de $i_{\mathcal{A}}^{-1}(\mathcal{W})$ et dont les cofibrations sont les monomorphismes de $\widehat{\mathcal{A}}$. Ce résultat dépasse néanmoins largement le cadre de ce document, et le lecteur curieux pourra se référer à [Cis06, Corollaire 4.2.18].

Attention, dans le cas où $\mathcal{A} = \mathbf{\Delta}$, cette nouvelle notion d'équivalence faible dépend du localisateur fondamental $\mathcal{W}$. Aussi les équivalences faibles ici définies ne sont-elle pas nécessairement des équivalences faibles simpliciales (cf. définition 2.3.3).

Théorème 3.1.8 (Grothendieck). *Soit $\mathcal{A}$ une petite catégorie. La partie des cofibrations triviales de $\widehat{\mathcal{A}}$ est stable par images directes et par compositions transfinies.*

Preuve. Les colimites de diagrammes à valeurs dans $\widehat{\mathcal{A}}$ sont calculées point par point. De même, les monomorphismes de $\widehat{\mathcal{A}}$ sont les injections point par point. Il est donc immédiat que l'ensemble des cofibrations de $\widehat{\mathcal{A}}$ est stable par images directes et compositions transfinies. Il suffit donc de montrer que l'image directe et la composition transfinie de cofibrations triviales sont des équivalences faibles.

Soit $F : \mathcal{J} \rightarrow \widehat{\mathcal{A}}$ où $\mathcal{J}$ est la catégorie associée à l'ensemble ordonné $\{1 > 0 < 2\}$ et $F(0) \rightarrow F(1)$ est une cofibration triviale. Si on note G le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F(0) & \xrightarrow{1_{F(0)}} & F(0) \\ \downarrow F(0 < 2) & & \\ & & F(2), \end{array}$$

et $\alpha : G \rightarrow F$ la transformation naturelle définie par

$$\alpha(0) = 1_{F(0)}, \quad \alpha(1) = F(0 < 1), \quad \alpha(2) = 1_{F(2)},$$

alors $G(0 < 1) = \mathbf{1}_{F(0)}$ est un monomorphisme et $i_{\mathcal{A}}\alpha$ est une équivalence faible étagée. On est donc dans les hypothèses du corollaire 3.1.5 : la flèche $F(2) = \operatorname{colim}_{\mathcal{J}}(G) \rightarrow \operatorname{colim}_{\mathcal{J}}(F)$ est une équivalence faible de $\widehat{\mathcal{A}}$.

Soit $F: \mathcal{J} \rightarrow \widehat{\mathcal{A}}$ où $\mathcal{J}$ est la catégorie associée à un ordinal κ et $F(\lambda) \rightarrow F(\lambda')$ est une cofibration triviale pour tout $\lambda < \lambda' < \kappa$. Si on note G le diagramme $\mathcal{J}: \kappa \rightarrow \widehat{\mathcal{A}}$ constant de valeur $F(0)$, alors $G(\lambda) \rightarrow G(\lambda')$ est la cofibration triviale $\mathbf{1}_{F(0)}$ pour tout $\lambda < \lambda' < \kappa$. La transformation naturelle $\alpha: G \rightarrow F$ définie par $\alpha(\lambda) = F(0 \leq \lambda)$ pour tout $\lambda < \kappa$ fait de $i_{\mathcal{A}}\alpha$ une équivalence faible étagée. Le corollaire 3.1.5 s'applique alors : la flèche induite $F(0) = \operatorname{colim}_{\mathcal{J}}(G) \rightarrow \operatorname{colim}_{\mathcal{J}}(F)$ est une équivalence faible de $\widehat{\mathcal{A}}$. $\square$

Minimalité de $\mathcal{W}_{\infty}$. Rappelons qu'on a défini $\mathcal{W}_{\infty}$ comme $N^{-1}(W_{\widehat{\Delta}})$, où $W_{\widehat{\Delta}}$ est lui-même défini comme $|-|^{-1}(W_{\infty})$ (cf. définitions 2.3.1, 2.3.3 et 2.3.5). On va alors montrer que $\mathcal{W}_{\infty} \subseteq \mathcal{W}$ pour tout localisateur fondamental $\mathcal{W}$, en procédant comme suit : on montre

- d'une part que $\mathcal{W} = N^{-1} i_{\Delta}^{-1} \mathcal{W}$,
- d'autre part qu'on a l'inclusion $W_{\widehat{\Delta}} \subseteq i_{\Delta}^{-1} \mathcal{W}$ dans la catégorie $\widehat{\Delta}$.

Les deux résultats combinés donnent le théorème voulu.

On fixe maintenant un localisateur fondamental $\mathcal{W}$. Par analogie avec la topologie, on dit qu'une petite catégorie $\mathcal{A}$ est *faiblement contractile* si il existe un foncteur $i: e \rightarrow \mathcal{A}$ tel que, en notant r l'unique foncteur $\mathcal{A} \rightarrow e$, le foncteur constant $ir: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ est une équivalence faible. S'il existe un « zig-zag », i.e. une suite

$$\mathbf{1}_{\mathcal{A}} \xrightarrow{\alpha_1} F_1 \xleftarrow{\alpha_2} F_2 \rightarrow \dots \xleftarrow{\alpha_n} F_n$$

dans $\mathcal{A}^{\mathcal{A}}$ (le sens de la dernière flèche dépendant de la parité de n) avec F_n un foncteur constant (i.e. de la forme ir pour des i et r comme précédemment), alors la catégorie $\mathcal{A}$ est dite *contractile*. La proposition 1.2.5 assure immédiatement que toute petite catégorie contractile est faiblement contractile.

Lemme 3.1.9. *Une petite catégorie non vide est faiblement contractile si et seulement si elle est asphérique.*

Preuve. Si $\mathcal{A} \rightarrow e \in \mathcal{W}$, tout foncteur $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ est une équivalence faible par **FS2**, donc notamment un foncteur constant. Réciproquement, si $\mathcal{A}$ est contractile, il existe $i: e \rightarrow \mathcal{A}$ tels que $ir \in \mathcal{W}$, où r est l'unique foncteur $\mathcal{A} \rightarrow e$. Comme $ri = \mathbf{1}_e$, par **FS3**, r est une équivalence faible, i.e. $\mathcal{A}$ est asphérique. $\square$

Rappelons qu'on fait l'abus de noter $\Delta_{/\mathcal{A}}$ la catégorie $i_{\Delta} N\mathcal{A}$.

Lemme 3.1.10. *Soit $\mathcal{A}$ une petite catégorie avec un objet final ω . Alors $\Delta_{/\mathcal{A}}$ est asphérique.*

Preuve. On va construire un « zig-zag » de longueur 2. Soit $D: \Delta_{/\mathcal{A}} \rightarrow \Delta_{/\mathcal{A}}$ le foncteur de *décalage* défini sur les objets par

$$D(x: [n] \rightarrow \mathcal{A}): [n+1] \rightarrow \mathcal{A}, \quad k \mapsto \begin{cases} x(k) & \text{si } k \leq n \\ \omega & \text{si } k = n+1 \end{cases}$$

(c'est-à-dire, on allonge une chaîne de $\mathcal{A}$ en ajoutant au bout l'objet final ω), et sur un morphisme $f : x \rightarrow x'$ avec $x : [n] \rightarrow \mathcal{A}$ et $x' : [m] \rightarrow \mathcal{A}$ (i.e. une flèche $f : [n] \rightarrow [m]$ de Δ telle que $N(f)(x') = x$) par

$$D(f : x \rightarrow x') : D(x) \rightarrow D(x'), \quad k \mapsto \begin{cases} f(k) & \text{si } k \leq n \\ m+1 & \text{si } k = n+1 \end{cases}.$$

Notons aussi $\Omega : \Delta_{/\mathcal{A}} \rightarrow \Delta_{/\mathcal{A}}$ le foncteur constant de valeur $[0] \rightarrow \mathcal{A} : 0 \mapsto \omega$. Alors on a deux transformations naturelles

$$1_{\Delta_{/\mathcal{A}}} \xrightarrow{\alpha} D \xleftarrow{\beta} \Omega$$

où α est donnée point par point par les inclusions $\delta_{n+1}^{n+1} : [n] \rightarrow [n+1]$ de Δ , et β est donnée point par point par les flèches $[0] \rightarrow [n+1] : 0 \mapsto n+1$ de Δ . $\square$

Rappelons qu'on a une transformation naturelle $\alpha : i_{\Delta} N \rightarrow 1_{\text{Cat}}$ définie au point $\mathcal{A}$ comme

$$\alpha_{\mathcal{A}} : (x : [n] \rightarrow \mathcal{A}) \mapsto x(n), \quad \left(f : ([n] \xrightarrow{x} \mathcal{A}) \rightarrow ([m] \xrightarrow{x'} \mathcal{A}) \right) \mapsto x'(f(n) \rightarrow m).$$

Lemme 3.1.11. *Soit $\mathcal{A}$ une petite catégorie. Le foncteur $\alpha_{\mathcal{A}} : \Delta_{/\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{A}$ est asphérique.*

Preuve. Soit $a \in \mathcal{A}$. Le foncteur

$$(\Delta_{/\mathcal{A}})_{/a} \rightarrow \Delta_{/\mathcal{A}_{/a}}, \quad (x, f : x(n) \rightarrow a) \mapsto (x(1) \rightarrow \dots \rightarrow x(n) \xrightarrow{f} a)$$

est une clairement une équivalence de catégories. Or $\mathcal{A}_{/a}$ admet un objet final, donc le lemme précédent montre que $\Delta_{/\mathcal{A}_{/a}}$ est asphérique. Comme $\mathcal{A}_{/a}$ l'est également (elle admet un objet final), tout foncteur $\Delta_{/\mathcal{A}_{/a}} \rightarrow \mathcal{A}_{/a}$, en particulier $\alpha_{\mathcal{A}_{/a}}$, est une équivalence faible. $\square$

Corollaire 3.1.12. *On a l'égalité $\mathcal{W} = N^{-1} i_{\Delta}^{-1} \mathcal{W}$.*

Preuve. Pour tout foncteur $u : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ entre petites catégories, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{/\mathcal{A}} & \xrightarrow{\alpha_{\mathcal{A}}} & \mathcal{A} \\ i_{\mathcal{A}} N(u) \downarrow & & \downarrow u \\ \Delta_{/\mathcal{B}} & \xrightarrow{\alpha_{\mathcal{B}}} & \mathcal{B}. \end{array}$$

Le lemme précédent assure que les flèches horizontales sont des équivalences faibles. Donc, par **FS2**, u est une équivalence faible si et seulement si $i_{\mathcal{A}} N(u)$ en est une. $\square$

On va maintenant montrer que $W_{\hat{\Delta}} \subseteq i_{\Delta}^{-1} \mathcal{W}$. Le premier point consiste à montrer que les fibrations triviales de $\hat{\Delta}$ sont éléments de $i_{\Delta}^{-1} \mathcal{W}$. Pour ce faire, on revient rapidement sur la notion de partie faiblement saturée (cf. définition 1.1.1). On a défini une partie faiblement saturée $\mathcal{W}$ comme une partie de Mor Cat , mais la définition fait sens pour une partie de $\text{Mor } \mathcal{C}$ avec $\mathcal{C}$ une catégorie quelconque : c'est une partie $W \subseteq \text{Mor } \mathcal{C}$ satisfaisant aux trois axiomes

FS1 les idendités sont dans W ,

FS2 si f, g, h forment un triangle commutatif de $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{f} & b, \\ h \downarrow & \swarrow g & \\ & c \end{array}$$

et si deux des trois flèches f, g, h sont dans W , alors il en va de même de la troisième,

FS3 si $r: b \rightarrow a$ est une rétraction de $i: a \rightarrow b$ dans $\mathcal{C}$ (i.e. $ri = 1_a$), et si $ir \in W$, alors $r \in W$.

On a alors une propriété immédiate : pour tout foncteur $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, si W est une partie faiblement saturée de $\text{Mor } \mathcal{D}$, alors $F^{-1}W$ est une partie faiblement saturée de $\text{Mor } \mathcal{C}$. En particulier, comme le localisateur fondamental $\mathcal{W}$ est faiblement saturé, la partie $i_{\Delta}^{-1}\mathcal{W}$ est faiblement saturée dans $\text{Mor } \hat{\Delta}$.

Lemme 3.1.13. *Soit W une partie faiblement saturée de $\text{Mor } \hat{\Delta}$. Si W contient les projections $X \times \Delta[1] \rightarrow X$ pour tout $X \in \text{Ob } \hat{\Delta}$, alors les fibrations triviales de $\hat{\Delta}$ (cf. proposition 2.5.2) sont des éléments de W .*

Preuve. Soit $p: X \rightarrow Y$ une fibration triviale de $\hat{\Delta}$. Par définition, elle a la propriété de relèvement à droite relativement aux cofibrations. Or, dans $\hat{\Delta}$, tout objet est cofibrant, d'où un morphisme $s: Y \rightarrow X$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow s & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{1_Y} & Y. \end{array}$$

En d'autre termes, p est une rétraction de s . Par la propriété **FS3** de la partie faiblement saturée W , il suffit de montrer que $sp \in W$ pour conclure que $p \in W$.

Notons alors $i_0: X \hookrightarrow X \times \Delta[1]$ (respectivement $i_1: X \hookrightarrow X \times \Delta[1]$) le monomorphisme défini en tout degré $n \in \mathbb{N}$ par

$$x \mapsto (x, 0) \quad (\text{respectivement } x \mapsto (x, 1))$$

où 0 (respectivement 1) dénote abusivement la flèche $[n] \rightarrow [1]$ constante de valeur 0 (respectivement 1). Par propriété universelle du coproduit, ces morphismes i_0 et i_1 induisent une flèche $i_{0,1}: X \sqcup X \rightarrow X \times \Delta[1]$. C'est un monomorphisme (puisqu'un monomorphisme point par point) donc une cofibration de $\hat{\Delta}$. Aussi existe-t-il une flèche $h: X \times \Delta[1] \rightarrow X$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X \sqcup X & \xrightarrow{(1_X, sp)} & X \\ i_{0,1} \downarrow & \nearrow h & \downarrow p \\ X \times \Delta[1] & \xrightarrow{\pi} X & \xrightarrow{p} Y. \end{array}$$

Autrement dit, h fait commuter

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i_0} & X \times \Delta[1] & \xleftarrow{i_1} & X \\ & \searrow 1_X & \downarrow h & \swarrow sp & \\ & & Y. & & \end{array}$$

Ainsi, si l'on montre $i_0, i_1 \in W$, deux applications successives de **FS2** permettront de conclure. Or la projection $\pi: X \times \Delta[1] \rightarrow X$ appartient à W , donc la propriété **FS2** appliquée aux diagrammes

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i_0} & X \times \Delta[1] \\ & \searrow 1_X & \downarrow \pi \\ & & X \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} X \times \Delta[1] & \xleftarrow{i_1} & X \\ \pi \downarrow & \swarrow 1_X & \\ X & & \end{array}$$

assure que i_0 et i_1 appartiennent à W . □

Afin de déduire que les fibrations triviales de $\widehat{\Delta}$ sont dans la partie faiblement saturée $i_{\Delta}^{-1}\mathcal{W}$, il nous faut montrer que les projections $X \times \Delta[1] \rightarrow X$ y sont. Le lemme suivant donne un résultat légèrement plus général.

Lemme 3.1.14. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout ensemble simplicial X , la projection sur le premier facteur $X \times \Delta[n] \rightarrow X$ est élément de $i_{\Delta}^{-1}\mathcal{W}$.*

Preuve. Notons $\pi: X \times \Delta[n] \rightarrow X$ la projection canonique et montrons que le foncteur $i_{\Delta}(\pi)$ est asphérique. Pour cela, il suffit de montrer que, pour tout objet $x: \Delta[m] \rightarrow X$ de $\Delta_{/X}$, la catégorie comma $(\Delta_{/X \times \Delta[n]})_{/x}$ est asphérique. Cette dernière est par définition la catégorie dont

- les objets sont les triplets (y, f, g) avec $y: \Delta[k] \rightarrow X$ un simplexe de X , $f: [k] \rightarrow [n]$ une flèche de Δ et $g: [k] \rightarrow [m]$ une flèche de Δ faisant commuter le triangle

$$\begin{array}{ccc} \Delta[k] & \xrightarrow{g} & \Delta[m] \\ & \searrow y & \downarrow x \\ & & X, \end{array}$$

- les morphismes $(y, f, g) \rightarrow (y', f', g')$ sont les flèches $h: [k] \rightarrow [k']$ de Δ telles que $f'h = f$ et faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \Delta[k] & \xrightarrow{h} & \Delta[k'] & & \\ & \searrow g & \swarrow g' & & \\ & & \Delta[n] & & \\ & \searrow y & \swarrow y' & & \\ & & X. & & \end{array}$$

Le foncteur $(\Delta_{/X \times \Delta[n]})_{/X} \rightarrow \Delta_{/\Delta[n] \times \Delta[m]}$ défini par $(y, f, g) \mapsto (f, g)$ est alors clairement une équivalence de catégories (moralemment, ce foncteur élimine les « redondances » présentes dans la description ci-dessus). Or le foncteur nerf , en tant qu'adjoint à droite, commute aux produits : $\Delta[n] \times \Delta[m] \simeq N([n] \times [m])$ (où le produit $[n] \times [m]$ est pris dans Cat). De plus, $[n] \times [m]$ admet un objet final, donc par le lemme 3.1.10, $\Delta_{/\Delta[n] \times \Delta[m]} \simeq \Delta_{/[n] \times [m]}$ est asphérique. $\square$

Afin de prouver le résultat annoncé, à savoir $W_{\hat{\Delta}} \subseteq i_{\hat{\Delta}}^{-1}\mathcal{W}$, nous devons invoquer l'argument du petit objet. On admettra ici cet argument et on restera volontairement vague sur ses conditions d'applications. Commençons par un petit point de vocabulaire : dans une catégorie cocomplète $\mathcal{C}$, pour tout $S \subseteq \text{Mor } \mathcal{C}$, on appelle *partie engendrée par S* la plus petite partie de $\text{Mor } \mathcal{C}$ stable par images directes, par compositions tranfinies et par rétractes, et contenant S . Il peut parfois être utile de s'abstraire des rétractes : on note $\text{cell}(S)$ la plus partie stable par images directes et compositions tranfinies contenant S .

REMARQUE 3.1.15. Un résultat facile, dont on laisse la démonstration au lecteur, est le suivant : dans une catégorie $\mathcal{C}$, une flèche admet la propriété de relèvement à droite relativement à une partie $S \subseteq \text{Mor } \mathcal{C}$ si et seulement si elle admet la propriété de relèvement à droite relativement à la partie engendrée par S .

Informellement, l'argument du petit objet s'énonce comme suit.

Lemme 3.1.16 (Argument du petit objet). *Dans une catégorie $\mathcal{C}$ « convenable » munie d'un **petit** ensemble $S \subseteq \text{Mor } \mathcal{C}$, tout morphisme f se factorise en pi avec i dans $\text{cell}(S)$ et p ayant la propriété de relèvement à droite relativement aux éléments de S .*

Pour être rigoureux, il faut remplacer « convenable » par *localement présentable*. Volontairement, on ne s'étend pas sur la signification précise de cette notion. Pour ce qui suit, il suffit de savoir que $\hat{\Delta}$ l'est. Le lecteur intéressé pourra se reporter à [Lur09, Appendice 1.2].

On aura également besoin de la caractérisation suivante des fibrations de Kan. On rappelle que $\partial \Delta[n]$ est le sous-ensemble simplicial de $\Delta[n]$ constitué en tout degré des applications non surjectives. Pour tout ensemble simplicial X , notons

$$i_0^X : X \simeq X \times \Delta[0] \xrightarrow{1_X \times \delta_1^0} X \times \Delta[1] \quad \text{et} \quad i_1^X : X \simeq X \times \Delta[0] \xrightarrow{1_X \times \delta_1^0} X \times \Delta[1].$$

On a alors, pour $\varepsilon \in \{0, 1\}$, un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \partial \Delta[n] & \hookrightarrow & \Delta[n] \\ \downarrow i_{\varepsilon}^{\partial \Delta[n]} & & \downarrow i_{\varepsilon}^{\Delta[n]} \\ \partial \Delta[n] \times \Delta[1] & \hookrightarrow & \Delta[n] \times \Delta[1], \end{array}$$

qui induit un morphisme $j_{n,\varepsilon} : (\partial \Delta[n] \times \Delta[1]) \sqcup_{\partial \Delta[n]} \Delta[n] \rightarrow \Delta[n] \times \Delta[1]$. On note J l'ensemble des $j_{n,\varepsilon}$, $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in \{0, 1\}$.

Lemme 3.1.17. *Un morphisme d'ensembles simpliciaux est une fibration de Kan si et seulement s'il admet la propriété de relèvement à droite relativement aux éléments de J .*

Preuve. La partie engendrée par J coïncide avec la partie engendrée par les inclusions de cornet $\Lambda^n[k] \hookrightarrow \Delta[n]$ (voir [GZ67, IV.2.1]). La remarque 3.1.15 permet donc de conclure. $\square$

Proposition 3.1.18. *On a l'inclusion $W_{\hat{\Delta}} \subseteq i_{\Delta}^{-1}\mathcal{W}$.*

Preuve. Soit $f \in W_{\hat{\Delta}}$. Par l'argument du petit objet (lemme 3.1.16) appliqué à f et au petit ensemble J , on a une factorisation $f = pi$ où i est dans la partie engendrée par $\text{cell}(J)$ et où p admet la propriété de relèvement à droite relativement à J , i.e. est une fibration de Kan. On va maintenant montrer que p et i sont éléments de $i_{\Delta}^{-1}\mathcal{W}$. La propriété **FS2** montrera alors que f l'est également.

Commençons par p . Par le lemme 3.1.17, les éléments de J ont la propriété de relèvement à gauche relativement à toutes les fibrations de Kan. Ce sont donc des cofibrations triviales de $\hat{\Delta}$ (au sens de la structure de catégorie de modèles de Quillen, décrite en proposition 2.5.2). Il suit alors de la remarque 3.1.15 que la partie engendrée par J est constituée de cofibrations triviales. En particulier, $i \in \text{cell}(J)$ est une cofibration triviale. Comme f et i sont dans la partie faiblement saturée $W_{\hat{\Delta}}$, il en va de même de p par **FS2**. Ainsi, la fibration de Kan p est une équivalence faible simpliciale. Par le lemme 3.1.13, p est donc dans $i_{\Delta}^{-1}\mathcal{W}$.

Il reste à montrer que i est dans $i_{\Delta}^{-1}\mathcal{W}$. On montre tout d'abord que $J \subseteq i_{\Delta}^{-1}\mathcal{W}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon \in \{0, 1\}$, on a un carré cocartésien

$$\begin{array}{ccc} \partial \Delta[n] & \xrightarrow{\quad} & \Delta[n] \\ i_{\varepsilon}^{\partial \Delta[n]} \downarrow & & \downarrow \\ \partial \Delta[n] \times \Delta[1] & \xrightarrow{\quad} & (\partial \Delta[n] \times \Delta[n]) \sqcup_{\partial \Delta[n]} \Delta[n]. \end{array}$$

où la flèche de gauche $i_{\varepsilon}^{\partial \Delta[n]}$ est un monomorphisme de $i_{\Delta}^{-1}\mathcal{W}$. Par le théorème 3.1.8, la flèche verticale de droite $\Delta[n] \rightarrow (\partial \Delta[n] \times \Delta[n]) \sqcup_{\partial \Delta[n]} \Delta[n]$ est encore un monomorphisme de $i_{\Delta}^{-1}\mathcal{W}$. De plus, par définition, cette flèche fait commuter le triangle

$$\begin{array}{ccc} \Delta[n] & \xrightarrow{i_{\varepsilon}^{\Delta[n]}} & \Delta[n] \times \Delta[1] \\ \downarrow & \nearrow j_{n,\varepsilon} & \\ (\partial \Delta[n] \times \Delta[n]) \sqcup_{\partial \Delta[n]} \Delta[n] & & \end{array}$$

Le lemme 3.1.14 implique facilement que le monomorphisme $i_{\varepsilon}^{\Delta[n]}$ est élément de $i_{\Delta}^{-1}\mathcal{W}$. Aussi a-t-on $j_{n,\varepsilon} \in i_{\Delta}^{-1}\mathcal{W}$ par **FS2**. Les éléments de J sont donc des monomorphismes de $i_{\Delta}^{-1}\mathcal{W}$: le théorème 3.1.8 assure alors que la partie engendrée par J est encore composée de monomorphismes de $i_{\Delta}^{-1}\mathcal{W}$. En particulier, $i \in i_{\Delta}^{-1}\mathcal{W}$. $\square$

Corollaire 3.1.19. *La partie $\mathcal{W}_{\infty}$ des ∞ -équivalences est incluse dans tout localisateur fondamental.*

Preuve. Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental. Par la proposition 3.1.18, on a l'inclusion $W_{\hat{\Delta}} \subseteq i_{\Delta}^{-1}\mathcal{W}$. Prenant l'image inverse par le foncteur nerf, on a donc l'inclusion $\mathcal{W}_{\infty} \subseteq N^{-1}i_{\Delta}^{-1}\mathcal{W}$. Le corollaire 3.1.12 permet alors de conclure : $\mathcal{W}_{\infty} \subseteq \mathcal{W}$. $\square$

3.2 Les ∞ -équivalences comme localisateur fondamental

La motivation première de Grothendieck dans l'élaboration de la notion de localisateur fondamental était l'axiomatisation de $\mathcal{W}_{\infty}$ comme ensemble d'équivalences

d'homotopie catégoriques. Il serait donc déraisonnable que $\mathcal{W}_\infty$ ne soit pas un localisateur fondamental. On montre dans cette section que c'est bien le cas.

Les propriétés **LF1** et **LF2** sont rapidement vérifiées, et on se concentre par la suite sur la propriété **LF3**, aussi connu dans le cas de $\mathcal{W}_\infty$ sous le nom de théorème A (relatif) de Quillen. Le contenu technique de sa preuve est combinatoire, mais fait conceptuellement appel aux notions homotopiques déjà introduites (principalement les colimites homotopiques).

Propriétés LF1 et LF2. Dans la section 3.1, on a étendu la notion d'ensemble faiblement saturé à toute partie $S \subseteq \text{Mor } \mathcal{C}$ d'une catégorie $\mathcal{C}$ quelconque. On a également fait la remarque que si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ étaient des catégories, $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un foncteur et S une partie faiblement saturée de $\text{Mor } \mathcal{D}$, alors $F^{-1}S$ est une partie faiblement saturée de $\text{Mor } \mathcal{C}$.

Lemme 3.2.1. *La partie $\mathcal{W}_\infty$ de Mor Top est faiblement saturée.*

Preuve. **FS1** est claire. Passons à **FS2**. Soit un triangle commutatif de Top

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ h \downarrow & \swarrow g & \\ Z & & \end{array}$$

Si $f, g \in \mathcal{W}_\infty$, il est immédiat que $h \in \mathcal{W}_\infty$. Supposons maintenant $f, h \in \mathcal{W}_\infty$. Dans Set , on a $\pi_0(g) = \pi_0(h)\pi_0(f)^{-1}$ qui assure que $\pi_0(g)$ est une bijection. Soit $n \geq 1$ et $y \in Y$ (le cas $Y = \emptyset$ est trivial). On cherche à montrer que

$$\pi_n(g, y): \pi_n(Y, y) \rightarrow \pi_n(Z, g(y))$$

est un isomorphisme de groupe. Si $y = f(x)$ pour un $x \in X$, alors le morphisme $\pi_n(g, y) = \pi_n(h, x)\pi_n(f, x)^{-1}$ est un isomorphisme de groupes. Sinon, comme $\pi_0(g)$ est une bijection, il existe $x \in X$ tel que $f(x)$ est dans la même composante connexe par arcs que y : d'où un chemin $\gamma: [0, 1] \rightarrow Y$ avec pour extrémités $\gamma(0) = f(x)$ et $\gamma(1) = y$. Il induit des isomorphismes $\gamma_*: \pi_n(Y, f(x)) \rightarrow \pi_n(Y, y)$ et $(g \circ \gamma)_*: \pi_n(Z, h(x)) \rightarrow \pi_n(Z, g(y))$. On a alors

$$\pi_n(g, y) = (g \circ \gamma)_* \pi_n(h, x) \pi_n(f, x)^{-1} \gamma_*^{-1},$$

isomorphisme de groupes. Ainsi $g \in \mathcal{W}_\infty$. Le cas où $g, h \in \mathcal{W}_\infty$ se traite de manière similaire pour déduire $f \in \mathcal{W}_\infty$.

Montrons maintenant **FS3**. Dans toute catégorie, si $r: b \rightarrow a$ est une rétraction de $i: a \rightarrow b$ et si ir inversible, alors $irir = i(ri)r = ir$ et donc $ir = \mathbf{1}_b$ (i.e. i et r sont des morphismes inverses l'un de l'autre). Ainsi dans Top , si $i: X \rightarrow Y$ admet une rétraction $r: Y \rightarrow X$ telle que $ir \in \mathcal{W}_\infty$, alors $\pi_0(r)\pi_0(i) = \mathbf{1}_{\pi_0(X)}$ par fonctorialité et $\pi_0(i)\pi_0(r)$ est bijective par hypothèse, donc $\pi_0(r)$ est une bijection d'inverse $\pi_0(i)$. De même, pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in X$, on a par fonctorialité $\pi_n(r, i(x))\pi_n(i, x) = \mathbf{1}_{\pi_n(X, x)}$ et $\pi_n(i, x)\pi_n(r, i(x))$ est un isomorphisme de groupes par hypothèse. Ainsi, $\pi_n(i, x)$ est un isomorphisme de groupes (d'inverse $\pi_n(r, i(x))$) pour tout $x \in X$ et tout $n \geq 1$, i.e. $i \in \mathcal{W}_\infty$. La propriété **FS2** déjà prouvée assure alors qu'on a aussi $r \in \mathcal{W}_\infty$. $\square$

Corollaire 3.2.2. *La partie $\mathcal{W}_\infty$ de Mor Cat est faiblement saturée.*

Preuve. C'est immédiat, $\mathcal{W}_\infty$ étant défini comme $(|-| \circ N)^{-1} \mathcal{W}_\infty$. $\square$

Proposition 3.2.3. *Soit $\mathcal{A}$ une petite catégorie ayant un objet final. Le foncteur $\mathcal{A} \rightarrow e$ appartient à $\mathcal{W}_\infty$.*

Preuve. La catégorie $\mathcal{A}$ admettant un objet final, l'unique foncteur $r: \mathcal{A} \rightarrow e$ admet un adjoint à droite $i: e \rightarrow \mathcal{A}$. On cherche à montrer que les réalisations $|Nr|$ et $|Ni|$ forment un couple d'équivalences d'homotopie quasi-inverses l'une de l'autre. D'une part, $ri = 1_e$, donc par fonctorialité $|Nr| \circ |Ni|$ est l'identité du point topologique $|Ne|$. D'autre part, l'unité de l'adjonction $\eta: 1_{\mathcal{A}} \rightarrow ir$ donne lieu à un foncteur h faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{i_0} \mathcal{A} \times [1] & \xleftarrow{i_1} \mathcal{A} \\ & \searrow 1_{\mathcal{A}} \quad \downarrow h \quad \swarrow ir & \\ & \mathcal{A}, & \end{array}$$

$i_\varepsilon, \varepsilon \in \{0, 1\}$ étant induit par les flèches $1_{\mathcal{A}}$ et $\mathcal{A} \rightarrow [1]$ constante de valeur ε . Rappelons maintenant que le foncteur nerf commute aux limites (c'est un adjoint à droite) donc notamment aux produits. Le diagramme ci-dessus donne donc lieu à un diagramme de Top

$$\begin{array}{ccc} |N\mathcal{A}| & \xrightarrow{|Ni_0|} |N\mathcal{A} \times \Delta[1]| & \xleftarrow{|Ni_1|} |N\mathcal{A}| \\ & \searrow 1_{|N\mathcal{A}|} \quad \downarrow |Nh| \quad \swarrow |N(ir)| & \\ & |N\mathcal{A}|. & \end{array}$$

Le lemme 3.2.4 ci-dessous montre que $|N\mathcal{A} \times \Delta[1]| \simeq |N\mathcal{A}| \times [0, 1]$ et que les applications $|Ni_\varepsilon|$ sont précisément celles induites par l'identité $1_{|N\mathcal{A}|}$ et les flèches $|N\mathcal{A}| \rightarrow [0, 1]$ constantes de valeur ε . Autrement dit, $|Nh|$ est une homotopie de $1_{|N\mathcal{A}|}$ à $|N(ir)|$. $\square$

Lemme 3.2.4. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a un isomorphisme de foncteurs*

$$|- \times \Delta[n]| \simeq |-| \times \Delta_n^{\text{top}}.$$

Preuve. On commence par montrer que pour tout $m, n \in \mathbb{N}$, l'application continue

$$\varphi: |\Delta[m] \times \Delta[n]| \rightarrow \Delta_m^{\text{top}} \times \Delta_n^{\text{top}}$$

induite par les projections $\Delta[m] \times \Delta[n] \rightarrow \Delta[m]$ et $\Delta[m] \times \Delta[n] \rightarrow \Delta[n]$ est un homéomorphisme. En remarquant que les projections citées sont le nerf des projections $[m] \times [n] \rightarrow [m]$ et $[m] \times [n] \rightarrow [n]$ de Cat, on laisse le lecteur vérifier que φ est une bijection ensembliste. Le codomaine $\Delta_m^{\text{top}} \times \Delta_n^{\text{top}}$ de φ étant séparé, il suffit de montrer que son domaine est compact pour conclure. Or le foncteur $|-|$ a été défini comme extension de Kan à gauche de l'espace cosimplicial $\Delta_\bullet^{\text{top}}: \Delta \rightarrow \text{Top}$ le long du plongement de Yoneda, donc l'espace topologique

$$|\Delta[m] \times \Delta[n]| = \Delta_{/\Delta[m] \times \Delta[n]} \text{colim} \left(\Delta_{/\Delta[m] \times \Delta[n]} \rightarrow \Delta \xrightarrow{\Delta_\bullet^{\text{top}}} \text{Top} \right)$$

est le quotient d'un nombre fini de simplexes topologiques $(\Delta[m] \times \Delta[n])$ ayant un nombre fini de simplexes non dégénérés), et est donc compact. La bijection continue φ est ainsi un homéomorphisme.

L'espace topologique Δ_n^{top} étant compact, il est notamment exponentiable dans Top , i.e. le foncteur $- \times \Delta_n^{\text{top}}$ admet un adjoint à droite $(-)^{\Delta_n^{\text{top}}}$. On a donc les isomorphismes suivants, naturels en $K \in \text{Ob } \widehat{\Delta}$ et $T \in \text{Ob } \text{Top}$:

$$\begin{aligned}
 \text{Hom}_{\text{Top}}(|K| \times \Delta_n^{\text{top}}, T) &\simeq \text{Hom}_{\text{Top}}(|K|, T^{\Delta_n^{\text{top}}}) \\
 &\simeq \text{Hom}_{\widehat{\Delta}}(K, \text{Sing}(T^{\Delta_n^{\text{top}}})) \\
 &\simeq \text{Hom}_{\widehat{\Delta}}(K, \text{Hom}_{\text{Top}}(\Delta_{\bullet}^{\text{top}}, T^{\Delta_n^{\text{top}}})) \\
 &\simeq \text{Hom}_{\widehat{\Delta}}(K, \text{Hom}_{\text{Top}}(\Delta_{\bullet}^{\text{top}} \times \Delta_n^{\text{top}}, T)) \\
 &\simeq \text{Hom}_{\widehat{\Delta}}(K, \text{Hom}_{\text{Top}}(|\Delta[-] \times \Delta[n]|, T)) \\
 &\simeq \text{Hom}_{\widehat{\Delta}}(K, \text{Hom}_{\widehat{\Delta}}(\Delta[-] \times \Delta[n], \text{Sing}(T))) \\
 &\simeq \text{Hom}_{\widehat{\Delta}}(K, \text{Hom}_{\widehat{\Delta}}(\Delta[-], (\text{Sing}(T))^{\Delta[n]})) \\
 &\simeq \text{Hom}_{\widehat{\Delta}}(K, (\text{Sing}(T))^{\Delta[n]}) \\
 &\simeq \text{Hom}_{\widehat{\Delta}}(K \times \Delta[n], (\text{Sing}(T))) \\
 &\simeq \text{Hom}_{\text{Top}}(|K \times \Delta[n]|, T).
 \end{aligned}$$

Ceci donne l'isomorphisme de foncteurs annoncé. $\square$

Théorème A de Quillen. Les propriétés **LF1** et **LF2** étant démontrées, on se concentre maintenant sur **LF3**, i.e. on cherche à montrer que, pour tout triangle commutatif de Cat

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{A} & \xrightarrow{u} & \mathcal{B} \\
 w \downarrow & \swarrow v & \\
 \mathcal{C} & &
 \end{array}$$

si le foncteur induit $u_{/c} : \mathcal{A}_{/c} \rightarrow \mathcal{B}_{/c}$ est une ∞ -équivalence pour tout objet c de $\mathcal{C}$, alors le foncteur u est une ∞ -équivalence.

On note $\delta : \Delta \rightarrow \Delta \times \Delta$ le foncteur diagonal. Il induit un foncteur image inverse

$$\widehat{\Delta \times \Delta} \rightarrow \widehat{\Delta} : K \mapsto ([n] \mapsto K_{n,n})$$

qu'on notera improprement δ^* (selon nos conventions, il faudrait le noter lourdement $(\delta^\circ)^*$). Par les considérations de la section 2.1, δ^* admet un adjoint à droite $\text{Ran}_{\delta^\circ}$ donné en tout point $K \in \text{Ob } \widehat{\Delta}$ par (voir proposition 2.1.4) :

$$\text{Ran}_{\delta^\circ} K \simeq \text{Hom}_{\widehat{\Delta}}(\delta^* \circ \mathfrak{h}_{-}^{\Delta \times \Delta}, K).$$

On notera ici δ_* pour le foncteur $\text{Ran}_{\delta^\circ}$. Comme pour tout $([m], [n])$, $\delta^* \circ \mathfrak{h}_{([m], [n])}^{\Delta \times \Delta}$ est l'ensemble simplicial

$$\text{Hom}_{\Delta \times \Delta}(\delta(-), ([m], [n])) \simeq \text{Hom}_{\Delta}(-, [m]) \times \text{Hom}_{\Delta}(-, [n]),$$

le foncteur δ_* est donné en tout point $K \in \text{Ob } \widehat{\Delta}$ par la formule

$$\delta_* K : ([m], [n]) \mapsto \text{Hom}_{\widehat{\Delta}}(\Delta[m] \times \Delta[n], K).$$

Rappelons que l'on a défini des structures de catégorie de modèles sur $\widehat{\Delta}$ (cf. proposition 2.5.2) et sur $\widehat{\Delta \times \Delta}$ (cf. proposition 2.5.13). La proposition 3.2.5 montre que δ^* passe aux catégories homotopiques. Afin d'éclaircir la preuve, on commence par un rappel sur les exponentiels de $\widehat{\Delta}$. La catégorie $\widehat{\Delta}$ est une catégorie de pré-faisceaux, et en tant que telle, elle admet des exponentiels pour tout objet : étant donnés K, L des ensembles simpliciaux, le lemme de Yoneda assure que l'exponentiel L^K existe et est l'ensemble simplicial

$$[n] \mapsto \text{Hom}_{\widehat{\Delta}}(\Delta[n] \times K, L).$$

Notamment, via l'identification $\widehat{\Delta \times \Delta} \simeq \widehat{\Delta}^{\Delta^\circ}$, le foncteur δ_* s'écrit

$$\delta_* K : [m] \mapsto K^{\Delta[m]}.$$

Proposition 3.2.5. *Le foncteur $\delta^* : \widehat{\Delta \times \Delta} \rightarrow \widehat{\Delta}$ respecte les équivalences faibles.*

Preuve. Les cofibrations de $\widehat{\Delta \times \Delta}$ étant les monomorphismes, i.e. les morphismes $f : K \rightarrow L$ d'ensembles bisimpliciaux telles que $f_{m,n} : K_{m,n} \rightarrow L_{m,n}$ soit injective pour tout (m, n) , tout objet de $\widehat{\Delta \times \Delta}$ est cofibrant. Il s'agit donc de montrer que δ^* envoie les équivalences faibles entre objets cofibrants sur des équivalences faibles. Le lemme de Ken Brown ([Hov00, Lemme 1.1.12]) assure qu'il suffit de montrer que les cofibrations triviales entre objets cofibrants sont envoyées par δ^* sur des équivalences faibles. Encore une fois, tous les objets de $\widehat{\Delta \times \Delta}$ sont cofibrants : on cherche donc à montrer que δ^* envoie les cofibrations triviales de $\widehat{\Delta \times \Delta}$ sur des équivalences faibles. On va faire mieux, en montrant que δ^* respecte les cofibrations triviales.

Par la proposition 2.4.4, l'ensemble des cofibrations triviales est exactement l'ensemble des flèches de $\widehat{\Delta \times \Delta}$ ayant la propriété de relèvement à gauche relativement aux fibrations. Aussi δ^* respecte-t-il les cofibrations triviales si et seulement si son adjoint à droite δ_* respecte les fibrations (c'est complètement formel). On en est donc réduit à montrer que pour toute fibration de Kan $f : K \rightarrow L$, son image $\delta_*(f)$ dans $\widehat{\Delta \times \Delta}$ est une fibration de Reedy, i.e. que la flèche induite

$$w_m(\delta_*(f)) : (\delta_* K)_{m,\bullet} \rightarrow (\delta_* L)_{m,\bullet} \times_{M_m(\delta_* L)} M_m(\delta_* K)$$

est une fibration de Kan pour tout $m \in \mathbb{N}$. La description du foncteur M_m donnée au paragraphe précédent le lemme 2.5.10 permet d'expliciter $w_m(\delta_*(f))$. En effet, pour tout ensemble simplicial Z ,

$$\begin{aligned} M_m(\delta_* Z) : [n] &\mapsto \text{Hom}_{\widehat{\Delta}}(\partial \Delta[m], (\delta_* Z)_{\bullet, n}) \\ &\simeq \text{Hom}_{\widehat{\Delta}}(\partial \Delta[m], \text{Hom}_{\widehat{\Delta}}(\Delta[\bullet] \times \Delta[n], Z)) \\ &\simeq \text{Hom}_{\widehat{\Delta}}(\partial \Delta[m], Z^{\Delta[n]}) \\ &\simeq \text{Hom}_{\widehat{\Delta}}(\Delta[n], Z^{\partial \Delta[m]}) \end{aligned}$$

On a ainsi un isomorphisme $M_m(\delta_* Z) \simeq Z^{\partial \Delta[m]}$. La flèche $w_m(\delta_*(f))$ s'identifie donc à la flèche (induite par les morphismes évidents)

$$K^{\Delta[m]} \rightarrow L^{\Delta[m]} \times_{L^{\partial \Delta[m]}} K^{\partial \Delta[m]}.$$

Le morphisme $\partial \Delta[m] \hookrightarrow \Delta[m]$ étant un monomorphisme, et f étant une fibration, la proposition [GZ67, Chapitre VI, paragraphe 4.3] s'applique : $w_m(\delta_*(f))$ est une fibration de Kan. $\square$

Le foncteur $\Delta \rightarrow e$ induit un foncteur image inverse

$$\widehat{\Delta} \rightarrow \widehat{\Delta}^{\Delta^{\circ}}, K \mapsto ([k] \mapsto K).$$

En postcomposant par chacun des deux isomorphismes $\widehat{\Delta}^{\Delta^{\circ}} \simeq \widehat{\Delta \times \Delta}$ déjà décrits (i.e. la décurryfication sur la première ou la deuxième variable), on obtient deux foncteurs $C_0, C_1: \widehat{\Delta} \rightarrow \widehat{\Delta \times \Delta}$ donnés pour tout ensemble simplicial K par

$$C_0(K): ([m], [n]) \mapsto K_m, \quad C_1(K): ([m], [n]) \mapsto K_n.$$

On note N_{ε} ($\varepsilon \in \{0, 1\}$) pour le foncteur composé $C_{\varepsilon} N: \text{Cat} \rightarrow \widehat{\Delta \times \Delta}$.

Posons $s: \Delta \rightarrow \Delta$ le foncteur défini sur les objets par $s([n]) = [n+1]$ et sur les flèches $f: [m] \rightarrow [n]$ par

$$sf(0) = 0, \quad sf(i) = f(i-1) + 1, \quad 1 \leq i \leq m+1.$$

Notamment, on a $s\delta_n^j = \delta_{n+1}^{j+1}$ et $s\sigma_n^j = \sigma_{n+1}^{j+1}$. Le foncteur s induit un foncteur image inverse $s^*: \widehat{\Delta} \rightarrow \widehat{\Delta}$ qui associe à tout ensemble simplicial K l'ensemble simplicial

$$s^*K: [n] \mapsto K_{n+1}, \quad \delta_n^j \mapsto K(\delta_{n+1}^{j+1}), \quad \sigma_n^j \mapsto K(\sigma_{n+1}^{j+1}).$$

Étant donnée une petite catégorie $\mathcal{C}$, on note par abus $\text{Ob } \mathcal{C}$ l'ensemble simplicial constant de valeur $\text{Ob } \mathcal{C}$. On a alors notamment $C_0 \text{Ob } \mathcal{C} \simeq C_1 \text{Ob } \mathcal{C}$ dans $\widehat{\Delta \times \Delta}$, et on note encore abusivement $\text{Ob } \mathcal{C}$ cet ensemble bisimplicial. On pose le morphisme d'ensembles simpliciaux

$$f: s^*(N\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob } \mathcal{C}, ([n+1] \xrightarrow{x} \mathcal{C}) \mapsto x(0).$$

Informellement, f sélectionne c_{-1} dans un n -simplexe $c_{-1} \rightarrow c_0 \rightarrow \dots \rightarrow c_n$ de $s^*(N\mathcal{C})$. Pour tout foncteur $w: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ de Cat , on pose le morphisme d'ensembles simpliciaux

$$g_w: N\mathcal{A} \rightarrow \text{Ob } \mathcal{C}, ([n] \xrightarrow{x} \mathcal{A}) \mapsto wx(n).$$

C'est-à-dire que g_w donne $w(a_n)$ sur un n -simplexe $a_0 \rightarrow \dots \rightarrow a_n$ de $N\mathcal{A}$. Notant $\mathcal{J}$ la catégorie associée à l'ensemble partiellement ordonné $\{1 < 0 > 2\}$, on obtient ainsi un foncteur

$$F: \text{Cat}_{/\mathcal{C}} \rightarrow \widehat{\Delta \times \Delta}^{\mathcal{J}}$$

associant à tout objet $w: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ de $\text{Cat}_{/\mathcal{C}}$ le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & C_1 s^*(N\mathcal{C}) & \\ & \downarrow C_1 f & \\ C_0(N\mathcal{A}) & \xrightarrow{C_0 g_w} & \text{Ob } \mathcal{C}. \end{array}$$

On rappelle que la catégorie $\widehat{\Delta \times \Delta}$, en tant que catégorie de préfaisceaux, admet toutes les limites. On définit le foncteur

$$B = \lim_{\mathcal{J}} \circ F: \text{Cat}_{/\mathcal{C}} \rightarrow \widehat{\Delta \times \Delta}.$$

Pour chaque objet $w: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ de $\text{Cat}_{/\mathcal{C}}$, l'ensemble bisimplicial $B(w)$ est donc en tout degré $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ l'ensemble des couples

$$\left(a_0 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_m} a_m, w(a_m) \xrightarrow{h} c_0 \xrightarrow{g_1} \dots \xrightarrow{g_n} c_n \right) \in (N\mathcal{A})_m \times (N\mathcal{C})_{n+1}. \quad (3.1)$$

Il vient de plus équipé de deux flèches p_w, q_w faisant de

$$\begin{array}{ccc} B(w) & \xrightarrow{q_w} & C_1 s^*(N\mathcal{C}) \\ p_w \downarrow & & \downarrow C_1 f \\ C_0(N\mathcal{A}) & \xrightarrow{C_0 g_w} & \text{Ob } \mathcal{C} \end{array}$$

un carré cartésien de $\widehat{\Delta} \times \Delta$.

Lemme 3.2.6. *Pour tout objet $w: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ de $\text{Cat}_{/\mathcal{C}}$, la flèche $p_w: B(w) \rightarrow C_0(N\mathcal{A})$ est une équivalence faible de $\widehat{\Delta} \times \Delta$.*

Preuve. Par définition des équivalences faibles de $\widehat{\Delta} \times \Delta$, on doit montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, la flèche

$$(p_w)_{m,\bullet}: B(w)_{m,\bullet} \rightarrow (C_0(N\mathcal{A}))_{m,\bullet}$$

est une équivalence faible de $\widehat{\Delta}$. Or, par définition de C_0 , l'ensemble simplicial $(C_0(N\mathcal{A}))_{m,\bullet}$ est l'ensemble simplicial constant de valeur $(N\mathcal{A})_m$, autrement dit

$$(C_0(N\mathcal{A}))_{m,\bullet} \simeq \coprod_{x \in (N\mathcal{A})_m} \Delta[0],$$

et la description explicite (équation 3.1) de $B(w)$ assure que

$$(B(w))_{m,\bullet} \simeq \coprod_{x \in (N\mathcal{A})_m} N(x(m) \setminus \mathcal{C})$$

Sous ces identifications, la flèche $(p_w)_{m,\bullet}$ n'est autre que la flèche induite par les morphismes $N(x(m) \setminus \mathcal{C}) \rightarrow \Delta[0]$ avec $x: [m] \rightarrow \mathcal{A}$ parcourant $(N\mathcal{A})_m$. Les catégories $x(m) \setminus \mathcal{C}$ ayant chacune un objet initial, elles sont de nerf contractile (l'argument est similaire au cas des catégories admettant un objet final, traité en proposition 3.2.3). Le lecteur pourra vérifier qu'une somme directe d'équivalences faibles simpliciales est une équivalence faible simpliciale (le foncteur de réalisation topologique commutant aux colimites, il s'agit de vérifier directement que W_∞ est stable par sommes directes). Ainsi, $(p_w)_{m,\bullet}$ est une équivalence faible simpliciale pour tout m . D'où le résultat. $\square$

Théorème 3.2.7 (Théorème A relatif). *Soit un triangle commutatif de Cat*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{u} & \mathcal{B} \\ w \downarrow & \swarrow v & \\ \mathcal{C} & & \end{array}$$

Si, pour tout objet c de $\mathcal{C}$, le foncteur induit $u_{/c}: \mathcal{A}_{/c} \rightarrow \mathcal{B}_{/c}$ est une ∞ -équivalence, alors u est une ∞ -équivalence.

Preuve. Par définition du foncteur B comme $\lim_I \circ F$, on a un carré commutatif dans $\widehat{\Delta \times \Delta}$

$$\begin{array}{ccc} B(w) & \xrightarrow{B(u)} & B(v) \\ p_w \downarrow & & \downarrow p_v \\ C_0(N\mathcal{A}) & \xrightarrow{C_0(Nu)} & C_0(N\mathcal{B}). \end{array}$$

Remarquons ici que $\delta^* \circ C_0$ est l'identité de $\widehat{\Delta}$. Ainsi, on a un carré commutatif de $\widehat{\Delta}$:

$$\begin{array}{ccc} \delta^*(B(w)) & \xrightarrow{\delta^* B(u)} & \delta^*(B(v)) \\ \delta^*(p_w) \downarrow & & \downarrow \delta^*(p_v) \\ N\mathcal{A} & \xrightarrow{Nu} & N\mathcal{B}. \end{array}$$

Les flèches p_w et p_v étant des équivalences faibles (voir lemme 3.2.6) et δ^* respectant les équivalences faibles (voir proposition 3.2.5), il suffit de montrer que $\delta^* B(u)$ est une équivalence faible pour conclure que Nu en est une.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la description explicite (équation 3.1) du foncteur B donne

$$(B(w))_{\bullet, n} \simeq \coprod_{y \in (N\mathcal{C})_n} N(\mathcal{A}_{/y(0)}), \quad (B(v))_{\bullet, n} \simeq \coprod_{y \in (N\mathcal{C})_n} N(\mathcal{B}_{/y(0)}).$$

Sous ces identifications, la flèche $B(u)_{\bullet, n}$ s'identifie à la somme directe des morphismes simpliciaux

$$N(u_{/y(0)}) : N(\mathcal{A}_{/y(0)}) \rightarrow N(\mathcal{B}_{/y(0)}), \quad y \in (N\mathcal{C})_n,$$

tous éléments de $W_{\widehat{\Delta}}$ par hypothèse. Comme déjà énoncé précédemment, $W_{\widehat{\Delta}}$ est stable par somme directe. Ainsi, $B(u)_{\bullet, n}$ est une équivalence faible simpliciale pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Considérons maintenant l'endofoncteur $\tau : \Delta \times \Delta \rightarrow \Delta \times \Delta$ échangeant les arguments

$$\tau : ([m], [n]) \mapsto ([n], [m]).$$

Il induit un foncteur image inverse $\tau^* : \widehat{\Delta \times \Delta} \rightarrow \widehat{\Delta \times \Delta}$ défini en tout point K et tout degré (m, n) par $(\tau^* K)_{m, n} = K_{n, m}$. Il est immédiat qu'on a l'égalité fonctorielle $\tau \circ \delta = \delta$, donc $\delta^* \circ \tau^* = \delta^*$. Par ce qui précède, $\tau^*(B(u))$ est une équivalence faible de $\widehat{\Delta \times \Delta}$. Comme δ^* préserve les équivalences faibles (proposition 3.2.5), $\delta^*(B(u)) = \delta^*(\tau^*(B(u)))$ est une équivalence faible de $\widehat{\Delta}$. $\square$

Ce dernier théorème est exactement la propriété **LF3**. Dans cette section 3.2, on a donc montré le théorème suivant.

Théorème 3.2.8. *La partie $\mathcal{W}_\infty$ de Mor Cat est un localisateur fondamental.*

Associé au corollaire 3.1.19 assurant que $\mathcal{W}_\infty$ est inclus dans tout localisateur fondamental, on a le théorème de Cisinski (anciennement conjecture de Grothendieck) annoncé : $\mathcal{W}_\infty$ est le localisateur fondamental minimal.

REMARQUE 3.2.9. Bien que non nécessaire à la preuve du théorème 3.2.7, il peut être conceptuellement important de comprendre que $\delta^* \circ B$ est en fait le calcul d'une colimite homotopique. Pour toute petite catégorie $\mathcal{C}$, la catégorie $\widehat{\Delta}^{\mathcal{C}}$ des diagrammes d'index $\mathcal{C}$ dans $\widehat{\Delta}$ admet une structure de catégorie de modèles, dite *structure projective*, dans laquelle les équivalences faibles et les fibrations sont définies point par point. Par les considérations de la section 2.4, le foncteur

$$\mathrm{hocolim}_{\mathcal{C}} : \mathbf{Ho}(\widehat{\Delta}^{\mathcal{C}}) \rightarrow \mathbf{Ho}(\widehat{\Delta})$$

existe alors et peut-être obtenu comme la dérivation à gauche du foncteur $\mathrm{colim}_{\mathcal{C}}$.

Dans [Dug01], Dugger donne un remplacement cofibrant dans $\widehat{\Delta}^{\mathcal{C}}$ comme suit. Pour tout foncteur $P : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$, c'est-à-dire un préfaisceau sur $\mathcal{C}^{\circ}$, on pose $q(P)$ le diagramme $\mathcal{C} \rightarrow \widehat{\Delta}$ défini en tout degré $n \in \mathbb{N}$ par

$$q(P)_n = \coprod_{x \in (N(\mathcal{C}^{\circ}/P))_n} \mathfrak{h}_{x(0)}^{\mathcal{C}^{\circ}}.$$

Maintenant, pour tout $F : \mathcal{C} \rightarrow \widehat{\Delta}$, on peut appliquer q en tout degré, ce qui donne un foncteur $\tilde{Q}(F) : \mathcal{C} \rightarrow \widehat{\Delta} \times \widehat{\Delta}$ défini en tout degré $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ par

$$\tilde{Q}(F)_{m,n} = \coprod_{x \in (N(\mathcal{C}^{\circ}/F_m))_n} \mathfrak{h}_{x(0)}^{\mathcal{C}^{\circ}}.$$

Or tout préfaisceau $P : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ s'exprime comme la colimite $\mathrm{colim}_{\mathcal{C}^{\circ}/P}(\mathfrak{h}_{-}^{\mathcal{C}^{\circ}})$. Donc on a pour tout $F : \mathcal{C} \rightarrow \widehat{\Delta}$ une flèche $\tilde{\eta}_F : \tilde{Q}(F) \rightarrow C_0(F)$ (on rappelle que $C_0(F)$ est l'ensemble bisimplicial $([m], [n]) \mapsto F_m$). On montre facilement que les $\tilde{\eta}_F$ forment une transformation naturelle $\tilde{\eta} : \tilde{Q} \rightarrow C_0$.

Enfin, on pose Q le foncteur $\delta^* \circ \tilde{Q}$ et $\eta = \delta^* \tilde{\eta}$. Dugger montre dans son article que Q , équipé de la transformation naturelle $\eta : Q \rightarrow \mathbf{1}_{\widehat{\Delta}^{\mathcal{C}}}$ est un remplacement cofibrant pour la structure projective de $\widehat{\Delta}^{\mathcal{C}}$. Ainsi, on peut donner une formule pour le foncteur $\mathrm{hocolim}_{\mathcal{C}}$: c'est le foncteur induit par $\mathrm{colim}_{\mathcal{C}} \circ Q$. Or les colimites dans $\widehat{\Delta}$ se calculent point par point : pour tout $F : \mathcal{C} \rightarrow \widehat{\Delta}$,

$$\left(\mathrm{hocolim}_{\mathcal{C}}(F) \right)_n = \mathrm{colim}_{\mathcal{C}} \left(\coprod_{x \in (N(\mathcal{C}^{\circ}/F_n))_n} \mathfrak{h}_{x(0)}^{\mathcal{C}^{\circ}} \right).$$

Or, pour tout préfaisceau P sur $\mathcal{C}^{\circ}$, on a

$$\coprod_{x \in (N(\mathcal{C}^{\circ}/P))_n} \mathfrak{h}_{x(0)}^{\mathcal{C}^{\circ}} \simeq \coprod_{x \in (N \mathcal{C}^{\circ})_n} \left(\coprod_{y \in P(x(n))} \mathfrak{h}_{x(0)}^{\mathcal{C}^{\circ}} \right).$$

Les colimites commutant aux sommes directes, on a alors

$$\begin{aligned} \mathrm{colim}_{\mathcal{C}} \left(\coprod_{x \in (N(\mathcal{C}^{\circ}/P))_n} \mathfrak{h}_{x(0)}^{\mathcal{C}^{\circ}} \right) &\simeq \coprod_{x \in (N \mathcal{C}^{\circ})_n} \left(\coprod_{y \in P(x(n))} \mathrm{colim}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{h}_{x(0)}^{\mathcal{C}^{\circ}}) \right) \\ &\simeq \coprod_{x \in (N \mathcal{C}^{\circ})_n} \left(P(x(n)) \times \mathrm{colim}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{h}_{x(0)}^{\mathcal{C}^{\circ}}) \right). \end{aligned}$$

Il faut maintenant se rendre compte que pour toute petite catégorie $\mathcal{A}$ et tout objet a de $\mathcal{A}$, le diagramme $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, a)$ est de colimite un singleton. En effet,

$$\text{colim}_{\mathcal{A}^\circ} (\mathfrak{h}_a^{\mathcal{A}}) = \coprod_{x \in \text{Ob } \mathcal{A}} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(x, a) \Big/ \sim$$

où $\sim$ est engendrée par les couples $(f : x \rightarrow a, g : x' \rightarrow a)$ tels qu'il existe une flèche $h : x' \rightarrow x$ de $\mathcal{A}$ satisfaisant $fh = g$. Toute flèche est donc en relation avec 1_a , ce qui donne le résultat annoncé. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(\text{hocolim}_{\mathcal{C}}(F) \right)_n \simeq \coprod_{x \in (\mathbb{N} \mathcal{C}^\circ)_n} F_n(x(n)) \simeq \coprod_{x \in (\mathbb{N} \mathcal{C})_n} F_n(x(0)).$$

Considérons le foncteur $\Theta : \text{Cat}_{/\mathcal{C}} \rightarrow \text{Cat}^{\mathcal{C}}$ défini par

$$\Theta(w : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}) = (c \mapsto \mathcal{A}_{/c}).$$

La description faite dans la preuve du théorème 3.2.7 du foncteur $(B(-))_{\bullet, n}$ montre qu'on a l'isomorphisme de foncteurs

$$\delta^* \circ B \simeq \text{hocolim}_{\mathcal{C}} \circ N \circ \Theta.$$

L'hypothèse du théorème A relatif de Quillen est alors exactement que le foncteur $u : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ au-dessus de c fait de $N(\Theta(u))$ une équivalence faible de $\widehat{\Delta}^{\mathcal{C}}$. Aussi son image par la colimite homotopique est-elle une équivalence faible de $\widehat{\Delta}$: c'est ce qu'on a montré « à la main » en prouvant que $\delta^* B(u)$ était une équivalence faible de $\widehat{\Delta}$.

Bibliographie

- [AGV72] M. ARTIN, A. GROTHENDIECK & J.-L. VERDIER – *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas (SGA4)*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 269, Springer-Verlag, 1972.
- [Cis04] D.-C. CISINSKI – « Le localisateur fondamental minimal », *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques* **45** (2004), p. 109–140.
- [Cis06] — , *Les préfaisceaux comme modèles des types d'homotopie*, Astérisque, vol. 308, Société Mathématique de France, 2006.
- [Dug01] D. DUGGER – « Universal homotopy theories », *Advances in Mathematics* **164** (2001), no. 1, p. 177–201.
- [GJ99] P. G. GOERSS & J. F. JARDINE – *Simplicial Homotopy Theory*, Progress in Mathematics, vol. 174, Birkhäuser Basel, 1999.
- [GR71] A. GROTHENDIECK & M. RAYNAUD – *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA1)*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 224, Springer-Verlag, 1971.
- [Gro83] A. GROTHENDIECK – « Pursuing stacks », Tapuscrit, 1983.
- [GZ67] P. GABRIEL & M. ZISMAN – *Calculus of fractions and homotopy theory*, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, vol. 35, Springer, 1967.
- [Hov00] M. HOVEY – *Model Categories*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 63, American Mathematical Society, 2000.
- [Lur09] J. LURIE – *Higher Topos Theory*, Annals of mathematics studies, vol. 170, Princeton University Press, 2009.
- [Mac00] S. MACLANE – *Categories for the Working Mathematician*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 5, Springer New York, 2000.
- [Mal05] G. MALTSINIOTIS – *La théorie de l'homotopie de Grothendieck*, Astérisque, vol. 301, Société Mathématique de France, 2005.
- [Qui67] D. G. QUILLEN – *Homotopical algebra*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 43, Springer-Verlag, 1967.
- [Qui73] — , « Higher algebraic K-theory : I », in *Higher K-Theories* (H. Bass, éd.), Lecture Notes in Mathematics, vol. 341, Springer Berlin Heidelberg, 1973, p. 85–147.
- [Wit49] J. H. C. WITHEHEAD – « Combinatorial homotopy I », *Bulletin of the American Mathematical Society* **55** (1949), no. 3, p. 213–245.