Toutes les réponses devront être justifiées par une démonstration mathématique rédigée dans un français correct. Le barème est indicatif.

1. Questions de cours (10 points)

Indiquer un exemple de chacune des situations suivantes, en *démontrant* qu'il convient.

(1) Polynôme P dont le reste dans la division euclidienne par $X^3 + 7X - 2$ est $X^2 + 1$.
(2) Polynômes non constants P, Q tels que le degré de $P \times Q$ est 2014.
(3) Équation pour laquelle il n'y a pas unicité des solutions.
(4) Équation ayant une infinité de solutions dans $\mathbb{N}$.
(5) Assertions A, B telles que A implique B mais B n'implique pas A.
(6) Polynôme P de degré 5 tel que les coefficients de P' de degré $0, 1, 2, 3, 4$ sont tous égaux à 1.
(7) Nombres complexes u, v différents de 1 tels que 2014 est un argument de $u \times v$.
(8) Ensembles A, B, C tels que $A \cap B$ est inclus dans C mais A n'est pas inclus dans C et B n'est pas inclus dans C.
(9) Équation du second degré à coefficients réels ayant une seule solution réelle.
(10) Nombres complexes u, v distincts mais qui sont des racines carrées d'un même nombre.

2. Exercices (5 points)

2.1. **Calcul.** Effectuer la division euclidienne de $X^5 - X^4 + 21X^3 - 25X^2 + 25X$ par $X^2 - X + 1$.

2.2. **Suite avec paramètre.** Soit x un réel. On considère la suite (u_n) vérifiant $u_0 = x$, $u_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 6\, u_{n+1} - 2\, u_n.$$

(1) Déterminer des réels A, B, λ, μ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = A\, \lambda^n + B\, \mu^n$.
(2) Déterminer, en fonction de la valeur de x, la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

3. Problème (15 points)

Pour tout entier naturel n, on note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines du polynôme $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}$.

3.1. **Exemples.**

(1) Déterminer les éléments de $\mathbb{U}_1$ et de $\mathbb{U}_2$.
(2) Développer le produit $(X - 1)(X^2 + X + 1)$, puis en déduire $\mathbb{U}_3$.
(3) En factorisant $X^4 - 1$, déterminer de même $\mathbb{U}_4$.
(4) Représenter graphiquement les ensembles $\mathbb{U}_1, \mathbb{U}_2, \mathbb{U}_3, \mathbb{U}_4$ dans le plan complexe.

3.2. **Cas général.** Soit n un entier naturel non nul.

(1) Montrer que $\mathbb{U}_n$ possède exactement n éléments et que $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\mathbf{i}\frac{2k\pi}{n}},\ 0 \leq k \leq n-1 \right\}$.
(2) Montrer que la somme des éléments de $\mathbb{U}_n$ vaut 0. En déduire la valeur de

$$\cos\left(\frac{\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{11}\right).$$

(3) Montrer que les éléments de $\mathbb{U}_n$ sont les sommets d'un n-gone régulier dans le plan complexe.

3.3. **Produits d'éléments.**

(1) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{U}_n$, on a $z^{-1} \in \mathbb{U}_n$. En déduire le produit de tous les éléments de $\mathbb{U}_n$.
(2) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{U}_n$, le nombre d'éléments distincts de $\{z^k,\ k \in \mathbb{N}\}$ est un diviseur de n. On pourra considérer le plus petit $k \geq 1$ tel que $z^k = 1$ (en montrant qu'il existe).