Parties d'un ensemble, Applications
Exercices

E1A 2018–2019

Parties d'un ensemble et opérations sur les parties

1. Les énoncés suivants sont-ils vrai ou faux ? Justifier vos réponses.

(a) $2 \in \{3, \{2\}, \{\{4\}\}, \emptyset\}$

(b) $\{1\} = \{\{1\}\}$

(c) $3 \in \emptyset$

(d) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

(e) $\emptyset \subset \mathcal{P}(\{1\})$

(f) $\emptyset \in \{1\}$

2. Dans chacune des situations suivantes, A et B sont des parties d'un ensemble E. Expliciter les parties $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap \overline{B}$ et $\overline{A} \cap B$.

(a) $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 4\}$

(b) $E = \mathbb{R}$, $A =]-\infty; 3]$, $B = [2; +\infty[$

(c) $E = \mathbb{R}$, $A =]-\infty; 2]$, $B = [3; +\infty[$

(d) $E = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{N}$, $B =]0; +\infty[$

3. Soient A, B, C trois parties d'un ensemble E. Simplifier les expressions suivantes :

(a) $(A \cup B) \cap (B \cup C)$

(b) $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$

(c) $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$

(d) $A \cup (B \cap \overline{A}) \cup (C \cap \overline{A})$

4. A et B étant deux parties d'un ensemble E, montrer que les propositions suivantes sont équivalentes : (a) $A \subset B$, (b) $\overline{B} \subset \overline{A}$, (c) $B \cup \overline{A} = E$.

5. A, B, C étant trois parties d'un ensemble E, montrer que : $\left.\begin{array}{ccc} A \cup B & \subset & A \cup C \\ A \cap B & \subset & A \cap C \end{array}\right\} \Rightarrow B \subset C$

6. Soit A une partie d'un ensemble E. Démontrer que :

$$(\forall X \in \mathcal{P}(E),\ A \cup X = E) \ \Rightarrow\ A = E, \qquad \text{et} \qquad (\forall X \in \mathcal{P}(E),\ A \cap X = \emptyset) \ \Rightarrow\ A = \emptyset.$$

Dénombrement des parties, combinaisons

7. On considère un jeu de 32 cartes. Pour chacune des conditions suivantes, déterminer le nombre de mains de 5 cartes qui la vérifient :

(a) N'importe quelle main.

(b) Il y a au moins un pique.

(c) Il y a exactement deux valets.

(d) Il y a exactement un as et deux carreaux.

(e) La main contient deux paires mais pas de brelan.

(f) Les cinq cartes sont de la même couleur.

(g) Les cinq cartes forment une quinte flush (suite de même couleur).

8. Soit n un entier strictement positif et $E = \{1, 2, \dots, n\}$.

(a) Trouver le nombre de couples (x, y) de E^2 tels que $x > y$.

(b) Trouver le nombre de couples (x, y) de E^2 tels que $x = y$.

(c) Trouver le nombre de triplets (x, y, z) de E^3 tels que $x < y < z$.

9. Sans se limiter aux mots du dictionnaire, combien peut-on former d'anagrammes de MAISON ? de RADAR ? de MISSISSIPI ? ABRACADABRA ?

10. **(Formule de Vandermonde)** Soient m, n et k des entiers naturels tels que $k \leqslant m+n$. On considère un tirage de k boules dans une urne qui contient m boules rouges et n boules bleues.

(a) Déterminer pour tout $j \in [\![0, k]\!]$ le nombre de résultats possibles comportant j boules rouges.

(b) En déduire que : $\displaystyle\binom{m+n}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j}\binom{n}{k-j}$, puis simplifier la somme : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Applications entre deux ensembles

11. On considère les deux applications f et g de $[\![1, 9]\!]$ dans lui-même définies par :

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	6	4	7	8	9	3	5	1	2

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$g(x)$	1	2	7	4	5	6	3	8	9

(a) Représenter de la même façon les applications $g \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ et $f \circ g$.

(b) Montrer que f est bijective et déterminer sa réciproque.

12. Soient $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ deux applications telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(n) = n+1, \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} g(0) = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ g(n) = n-1 \end{cases}$$

(a) Étudier l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité, éventuelle de f et g.

(b) Préciser $f \circ g$ et $g \circ f$.

13. Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications et $h = g \circ f$ leur composée. Montrer que :

(a) Si h est injective, alors f aussi.

(b) Si h est surjective, alors g aussi.

14. Soit E un ensemble. Pour quel(s) $A \in \mathcal{P}(E)$ l'application suivante est-elle injective ? surjective ?

$$\psi \ : \ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ X & \longmapsto & A \cup X \end{array}$$

15. Soit $f : E \to E$ une application vérifiant $f \circ f \circ f = id_E$. Montrer que f est bijective.

16. (HEC 2017) Soient a et b deux réels strictement positifs et soit $G_{a,b} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad G_{a,b}(x) = \exp\left(-a\,x - \frac{b}{2}x^2\right).$$

(a) Montrer que la fonction $G_{a,b}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur l'intervalle $]0, 1]$.

(b) Pour tout réel $y > 0$, résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $ax + \dfrac{b}{2}x^2 = y$.

(c) On note $G_{a,b}^{-1}$ la bijection réciproque de $G_{a,b}$.
Quelle est, pour tout $u \in [0, 1[$, l'expression de $G_{a,b}^{-1}(1-u)$?

17. Montrer que les applications suivantes sont des bijections et déterminer leurs réciproques :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x+2}{x+1} \end{array}, \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow &]-1, 1[\\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{1+|x|} \end{array}.$$

18. On considère $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ définie pour tout $n \in \mathbb{Z}$ par : $f(n) = \begin{cases} 2n & \text{si } n \geqslant 0, \\ -(2n+1) & \text{si } n < 0. \end{cases}$

(a) Représenter graphiquement l'application f.

(b) Montrer que f est une bijection, et expliciter sa bijection réciproque.

(c) Justifier qu'il n'existe pas de bijection croissante entre $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}$.

19. Quizz ! Dans chacun des cas suivants, l'application f est-elle injective, surjective, bijective ?

(a) $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$

(b) $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$

(c) $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$

(d) $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$

(e) $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \xrightarrow{f} & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$

(f) $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Q}^+ & \xrightarrow{f} & \mathbb{Q} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$

(g) $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \xrightarrow{f} & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array} \right.$

(h) $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{f} & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array} \right.$

(i) $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \xrightarrow{f} & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array} \right.$

(j) $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array} \right.$

(k) $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Q}^* & \xrightarrow{f} & \mathbb{Q}^* \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array} \right.$

(l) $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & |x| \end{array} \right.$

(m) $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x \end{array} \right.$

(n) $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \xrightarrow{f} & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & 2x \end{array} \right.$

(o) $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \xrightarrow{f} & \mathbb{Q} \\ x & \mapsto & 2x \end{array} \right.$