Suites numériques
Exercices

Lycée Carnot, E1A

Coefficients binomiaux et formule du binôme de Newton

1. Soient x, y deux réels. Développer les expressions suivantes :

a) $(2-x)^5$
b) $(3x+2y)^3$
c) $(x-1)^8$
d) $(x+1)^6+(x-1)^6$
e) $(3-\sqrt{5})^6$
f) $(1+\sqrt{2})^4$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier les expressions suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}$ b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{3^k}$ c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$ d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}$

3 (Technique à retenir)**.** Soit n un entier naturel non nul.

a) Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.
b) À l'aide d'un changement d'indice, simplifier alors la somme $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.
c) Calculer de même : i. $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$ ii. $\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}$ iii. $\sum_{k=0}^{n}k(n-k)\binom{n}{k}$ iv. $\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}$

4. Soit $k \in \mathbb{N}$. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant k$, $\displaystyle\sum_{j=k}^{n}\binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}$.

5. *Exercice assez difficile qui met en jeu les techniques des exercices précédents.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \frac{1}{n+1}$.
b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

Relations de récurrence

6. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n+1}{2+u_n}$.
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

7. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)u_k$

a) Démontrer que : $\forall n \geqslant 1$, $u_{n+1} = (n+2)\,u_n$.
b) Conjecturer une formule explicite, puis la démontrer par récurrence.

8. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{u_k}{k+1}$.

a) Démontrer que : $\forall n \geqslant 1$, $u_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)u_n$.
b) Conjecturer une formule explicite, puis la démontrer par récurrence.

Suites récurrentes usuelles d'ordre 1 et 2

9. Dans chacun des cas suivants, déterminer une formule explicite pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

a) $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 4u_n - 6$.

b) $u_0 = 1$; $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.

c) $u_0 = 1$; $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.

d) $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n)$.

e) $u_0 = 2$; $u_1 = \frac{10}{3}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ 3u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n$.

10. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.

11. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 3^n$.

a) Montrer que la suite (v_n) de terme général $v_n = \dfrac{u_n}{3^n}$ est une suite arithmético-géométrique.

b) En déduire une expression de u_n.

12. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n)^3$.

a) Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \ln u_n$ est bien définie.

b) Calculer v_n et déduire la valeur de u_n.

13. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 1}{2u_n + 4}$.

a) Montrer que la suite auxiliaire (t_n) de terme général $t_n = \dfrac{2u_n - 1}{u_n + 1}$ est géométrique.

b) En déduire une expression de t_n puis de u_n.

14. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 4$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \sqrt{u_n u_{n+1}}$.

a) Vérifier que cette suite est bien définie.

b) Donner une expression explicite de u_n. Comme dans les exercices précédents, on pourra introduire une suite auxiliaire (v_n) bien choisie.

15. Soient $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ définies par $u_1 = 12$, $v_1 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n) \end{cases}$.

a) Pour tout entier n strictement positif, on pose : $w_n = v_n - u_n$.
Montrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b) Pour tout entier n strictement positif, on pose : $t_n = 3u_n + 8v_n$.
Démontrer que la suite (t_n) est constante.

c) Exprimer w_n en fonction de n.

d) En déduire une expression explicite de u_n et v_n en fonction de n.

e) Calculer u_2, v_2, u_3 et v_3 à l'aide de la relation de récurrence, puis en utilisant le résultat de la question précédente.

16. On cherche à déterminer toutes les suites (u_n) vérifiant la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 3$$

a) Déterminer deux réels a et b tels que la suite (v_n) définie par $v_n = an + b$ vérifie la relation ci-dessus.

b) Montrer que la suite (z_n) définie par $z_n = u_n - v_n$ est d'un type bien connu, en déduire la valeur de z_n et celle de u_n.

17 (Astucieux)**.** On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1} + 2u_{n-2} + \cdots + 2u_0$$

Déterminer une expression de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.