Sommes, produits, récurrence
Exercices

Lycée Carnot, E1A

Sommes usuelles et règles de calcul

1. Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, calculer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \exp(kx)$.

2. Calculer les sommes suivantes :

a) $\sum_{k=1}^{n}(2k+1)$

b) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k$

c) $\sum_{k=1}^{n} 5^{2k}$

d) $\sum_{k=1492}^{1789} 10$

e) $\sum_{k=1}^{n} k(2k^2-1)$

f) $\sum_{k=0}^{n}(2^k+k^2+2)$

g) $\sum_{k=1}^{n}(6k^2+4k+1)$

h) $\sum_{k=1}^{9} \frac{1}{4^k}$

i) $\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{4^{k+1}}$

3. Soit n un entier naturel non nul.

a) Justifier sans calcul que :

$$\sum_{i=0}^{n}(2i)^2 + \sum_{j=0}^{n-1}(2j+1)^2 = \sum_{k=0}^{2n} k^2$$

b) Calculer séparément ces trois sommes et vérifier la formule précédente.

Changement d'indice, télescopage

4. Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1}$.

En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$, puis calculer de la même manière $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}$.

5. Soient a et b deux réels et n un entier naturel. Montrer que :

$$a^n - b^n \quad = \quad (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k\, b^{n-1-k} \quad = \quad (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}\, b^k$$

6. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, développer $(k+1)^3 - k^3$, puis en déduire par télescopage que :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Produits finis

7. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{R}^*$. Calculer les produits suivants :

$$\prod_{k=0}^{n} q, \qquad \prod_{k=0}^{n} q^2, \qquad \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{q}, \qquad \prod_{k=0}^{n} q^k, \qquad \prod_{k=0}^{n} q^{k^2}, \qquad \prod_{k=0}^{n} q^{2^k},$$

8. Soit n un entier naturel.

a) Exprimer à l'aide de puissances et de factorielles :

(i) le produit de tous les entiers de 1 à $2n$;

(ii) le produit des entiers *pairs* de 2 à $2n$;

b) En déduire le produit des entiers *impairs* de 1 à $2n-1$.

c) Calculer de même $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}$.

9. Pour tout entier $n \geqslant 2$, simplifier les produits :

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right), \qquad \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right), \qquad \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right).$$

Récurrence

10. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

11. Montrer que pour tout $n \geqslant 4$ entier naturel, $2^n \geqslant n^2$.

12. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est un multiple de 7. (remarquer que $7 = 3^2 - 2$)

13. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n + 2$. Calculer les premiers termes de la suite, conjecturer une formule pour u_n et démontrer cette conjecture par récurrence.

14. Vérifier par récurrence les résultats suivants :

a) $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{n} k\,k! = (n+1)! - 1$

b) $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)^3 = 2n^4 - n^2$

d) $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k2^k = (n-1)\,2^{n+1} + 2$

15. Soit x un réel tel que $x \leqslant 1$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ (1-x)^n \geqslant 1 - nx$

16. Soit (w_n) telle que $w_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = \dfrac{1}{3}(w_n + 4n + 6)$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = 2n + \dfrac{1}{3^n}$.

Sommes et produits doubles

17. Simplifier les expressions suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} ij$

b) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} ij$

c) $\displaystyle\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} ij$

d) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} i\,2^j$

e) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} 2^{i+j}$

f) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} 2^{i+j}$

g) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \min(i,j)$

h) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} (i+j)$

i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} \frac{1}{j}\right)$

j) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i}{j}$

k) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |i-j|$

18. Soit $(a_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}^*}$ une famille de réels. Montrer que pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \quad = \quad 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_i\, a_j.$$