Fonctions usuelles
Exercices

Lycée Carnot, E1A

Exponentielle et logarithme

1. Soit x un réel strictement positif. Simplifier autant que possible les expressions suivantes :

- $\ln(8)$
- $\ln(\sqrt{2})$
- $\ln(6) - \ln(3)$
- $\ln(2e^2)$
- $e^{2\ln(x)}$
- $\ln(2x) - \ln(x)$
- $\ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$
- $\ln(\sqrt{3}+\sqrt{2}) + \ln(\sqrt{3}-\sqrt{2})$
- $2\ln(\sqrt{3}+\sqrt{2}) - \ln(5+2\sqrt{6})$
- $\ln(e^4) - \ln(e^2) + \ln(\sqrt{e})$
- $\ln(e^2\sqrt{e}) + \ln(\frac{1}{e})$
- $\dfrac{\ln(e^5)}{\ln(e^3)}$
- $e^{-x}\sqrt{e^{2x}}$
- $\dfrac{e^{x^2-2x}(e^x)^2}{(e^{2x})^3}$
- $\dfrac{e^{x^2+2x}}{e^{(x+1)^2}}$

2. Soient λ un réel et E_λ l'ensemble des fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \lambda f(x)$.

(a) Pour tout $f \in E_\lambda$, montrer que $x \mapsto e^{-\lambda x} f(x)$ est constante.

(b) Expliciter l'ensemble E_λ.

3. On a vu dans le cours que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x) \leqslant x - 1$.

(a) Rappeler brièvement la démonstration de cette inégalité.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln(x)$, puis en déduire que : $\ln(x) < 2\sqrt{x}$.

(c) Justifier finalement que la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{\ln(x)}$ n'est pas majorée sur $\mathbb{R}_+^*$.

Puissances réelles

4. Simplifier $4^{\frac{\ln(3)}{\ln(2)}}$.

5. Soit $q > 0$ un réel et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ définie par $x \mapsto q^x$.

(a) Déterminer une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ q^x = e^{g(x)}$.

(b) En déduire que f est monotone et préciser son sens de variation selon la valeur de q.

(c) Montrer que f est majorée si et seulement si $q = 1$.

6. Pour chacune des fonctions ci-dessous, déterminer son domaine de définition, calculer sa dérivée et en déduire ses variations :

(a) $x \mapsto 2^{-x}$

(b) $x \mapsto x^x$

(c) $x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$

(d) $x \mapsto \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

Valeur absolue

7. Déterminer le domaine de définition puis la dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(|x|)$.

8. Soient x et y deux réels.

(a) Montrer que : $|x| \leqslant |y| + |x-y|$ et $|y| \leqslant |x| + |x-y|$.

(b) À l'aide d'un encadrement, en déduire que : $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x-y|$.

9. Soient f, g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

(a) Montrer que f est bornée si et seulement s'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leqslant K$.

(b) En déduire que si f et g sont bornées, alors $f + g$ et $f \times g$ sont bornées.

10. En discutant suivant la valeur du réel x, exprimer les quantités suivantes sans valeur absolue :

(a) $|x+1| + |x+2|$,

(b) $|x^2-1| - |x^2+1| + |2x^2-x+1|$,

(c) $\dfrac{|2x+7|+3}{7-|3x+2|}$.

11. Résoudre les équations et inéquations suivantes d'inconnue x dans $\mathbb{R}$:

(a) $|x+1| = 7$,

(b) $|x+1| + |x+2| = 1$,

(c) $|x+1| + |2x+3| + |4x+5| = 7$,

(d) $|x^2+x-7| + |x| < 5$.

Partie entière

12. Soit x un réel strictement positif. Montrer que :

- Le plus *grand* entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\sqrt{|n|} \leqslant e^x$ est $\lfloor e^{2x} \rfloor$
- Le plus *petit* entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{1}{n+1} < x$ est $\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$.
- Le plus *petit* entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $n^2 > x$ est $\lfloor \sqrt{x} \rfloor + 1$.
- Le plus *grand* entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\left(\frac{1}{2}\right)^n \geqslant x$ est $\left\lfloor -\dfrac{\ln(x)}{\ln(2)} \right\rfloor$.

13. Soient a et b deux réels tels que $a \leqslant b$.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, justifier que $n \leqslant b$ si et seulement si $n \leqslant \lfloor b \rfloor$.

(b) En déduire qu'il y a exactemet $\lfloor b \rfloor - \lfloor a \rfloor$ entiers dans l'intervalle $]a, b]$.

(c) Montrer de même que le nombre d'entiers dans le segment $[a, b]$ est $\lfloor b \rfloor + \lfloor -a \rfloor + 1$.

14. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $d(x) = x - \lfloor x \rfloor$.

(a) Montrer $d(\mathbb{R}) = [0; 1[$.

(b) Montrer que pour tous n entier relatif et x réel, $d(x+n) = d(x)$.

(c) Tracer le graphe de la fonction $x \mapsto d(x)$.

Compléments techniques : études de signe et inéquations

15. Soient x et y deux réels positifs.

(a) Déterminer des réels a et b tels que $(x+y)^2 - 4xy = a^2$ et $2(x^2+y^2) - (x+y)^2 = b^2$.

(b) En déduire l'encadrement $\sqrt{xy} \leq \dfrac{x+y}{2} \leq \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}$, puis préciser le ou les cas d'égalité.

16. Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue x dans $\mathbb{R}$:

(a) $5x^2 - 7x + 2 \leq 0$,

(b) $\dfrac{2x^2+7x+3}{5x^2-2x-16} \geq 0$,

(c) $x^2 - 5x + 4 \geq -2$,

(d) $\dfrac{2x-3}{x^2-4} < 1$.

On exprimera l'ensemble des solution sous la forme d'une réunion d'intervalles.

17. Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue x dans $\mathbb{R}$:

(a) $x + 2 \geq \sqrt{x+5}$

(b) $-x + 1 > \sqrt{3x^2 - 2x - 7}$

(c) $x - 2 \leq \sqrt{x-1}$

(d) $\sqrt{x+3} < -x + 4$