Étude de variations
Exercices

Lycée Carnot, E1A

Monotonie

1. Étudier les variations des fonctions suivantes :

(a) $x \mapsto x^3 - 3x + 1$

(b) $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$

(c) $x \mapsto \dfrac{x}{x^2-1}$

(d) $x \mapsto 3x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 72x + 1$

(e) $x \mapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$

(f) $x \mapsto \ln(e^x + e^{-x})$

2. Sans calculer leurs dérivées, déterminer les variations des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \ln\left(e^x - 1\right) \qquad g : x \mapsto \exp\left(\frac{1}{1-x}\right) \qquad h : x \mapsto \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

3 (HEC 2016 E)**.** Soient w et U les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall t > 0, \quad w(t) = \frac{2t}{1+t} \quad \text{et} \quad U(t) = w(t) - t\,w'(t).$$

Dresser le tableau de variation de la fonction U sur $\mathbb{R}_+^*$ et étudier la monotonie de U'.

4 (ESSEC2 2018)**.** Soient $\alpha > 1$ et $\xi \in [0,1]$ fixés. Pour $x \in [0,1]$, on pose

$$\psi_\xi(x) = \frac{x + (1-x)\xi}{x + \alpha(1-x) + (1-\alpha)(1-x)\xi}.$$

(a) Montrer que ψ_ξ est croissante sur $[0,1]$.

(b) Calculer $\psi_\xi(0)$. Montrer que la fonction $A : \xi \mapsto \psi_\xi(0)$ est croissante sur $[0,1]$.

Valeurs extrêmes

5. Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $x \mapsto x\sqrt{1-x^2}$.

(a) Montrer que f est minorée par 0. Est-ce un minimum ?

(b) Montrer que f est majorée par 1. Est-ce un maximum ?

(c) Montrer que f admet un maximum et le calculer.

6 (ESSEC2 2018)**.** Soient N_0 un entier naturel non nul et φ la fonction définie sur $]0;1]$ par :

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\ln\left((4-3x)N_0\right) + \frac{1}{2}\ln(N_0\,x)$$

(a) Construire le tableau de variations de φ sur $]0;1]$.

(b) Déterminer $x \in]0;1]$ tel que $\varphi(x)$ est maximal.

7 (ESC 2015 T)**.** On considère les fonctions f et g définies sur $]0,+\infty[$ par :

$$f(x) = x + 1 + \frac{\ln(x)}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 + 1 - \ln(x).$$

(a) Calculer la dérivée de g. En déduire le sens de variation de g sur $]0,+\infty[$.

(b) Montrer que $g\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}\ln(2)$. En déduire que $g(x) > 0$ pour tout $x \in]0,+\infty[$.

(c) En déduire les variations de f sur son domaine de définition.

Théorème de la bijection

8. Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{1+x^2}$ est une bijection de $[-1;1]$ sur un intervalle que l'on déterminera.

9. On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = e^x - \ln(x)$ ainsi que la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par : $g(x) = xe^x - 1$.

(a) Calculer la dérivée g' de g sur $[0;+\infty[$. En déduire le tableau des variations de g.

(b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $[0;1]$, que l'on notera α.

(c) Justifier que α est la seule solution dans $[0;+\infty[$. En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

(d) Montrer que, pour tout x strictement positif : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$. En déduire les variations de f.

(e) Justifier que $f(\alpha) = \alpha + \dfrac{1}{\alpha}$.

10 (EML 2015)**.** On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto x^2e^x - 1$.

(a) Dresser le tableau de variations de φ.

(b) Établir que l'équation $e^x = \dfrac{1}{x^2}$, d'inconnue $x \in]0;+\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et que α appartient à l'intervalle $\left]\frac{1}{2};1\right[$.

11 (EML 2016)**.** Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $t \mapsto t^2 - t\ln(t)$.

(a) En justifiant la dérivabilité sur $]0,+\infty[$, calculer $f'(t)$ puis $f''(t)$ pour tout $t > 0$.

(b) Dresser le tableau de variation de f.

(c) Montrer que l'équation $f(t) = 1$, d'inconnue $t \in]0,+\infty[$, admet une solution et une seule et que celle-ci est égale à 1.

12. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

(a) Montrer que c'est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle que l'on déterminera.

(b) Pour tout $y \in f(\mathbb{R})$, déterminer l'unique solution de l'équation $f(x) = y$.

13. Soit $f : x \mapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$.

(a) Dresser le tableau de variations de f.

(b) Pour tout $y \in \mathbb{R}$, déterminer le nombre d'antécédents de y par f.