

# Fonctions numériques

## Exercices

Lycée Carnot, E1A

### Généralités sur les fonctions

#### Vocabulaire des fonctions, domaine de définition, graphe

1. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

(a)  $s \mapsto \sqrt{\frac{2+3s}{5-2s}}$ ,

(e)  $w \mapsto \frac{\sqrt{w(w+1)}}{w^2+1}$ ,

(b)  $t \mapsto \sqrt{t^2-1}$ ,

(f)  $x \mapsto \ln(x^5+1)$ ,

(c)  $u \mapsto e^u \ln(2u+3)$ ,

(g)  $y \mapsto (y^2-y+2)^{1/5}$ ,

(d)  $v \mapsto \ln(1-2v^2)$ ,

(h)  $z \mapsto \ln\left(\frac{1-z}{1+z}\right)$ .

2. On considère les fonctions numériques  $f : x \mapsto \frac{x-2}{x-1}$  et  $g : x \mapsto \sqrt{x}$ .

Déterminer les domaines de définition des fonctions  $f+g$ ,  $f-g$ ,  $f \times g$ ,  $f/g$  et  $g/f$ .

3. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $x \mapsto x^2$ . Déterminer les ensembles  $f([0, 3])$ ,  $f([-1, 2])$  et  $f(\mathbb{R})$ .

4. Tracer les graphes des fonctions :

(a)  $x \mapsto x^3$ ,  $x \mapsto (x+1)^3$  et  $x \mapsto x^3+1$  sur une même figure.

(b)  $x \mapsto \ln(x+1)$ ,  $x \mapsto \ln(1-x)$  et  $x \mapsto \ln(x)-1$  sur une autre figure.

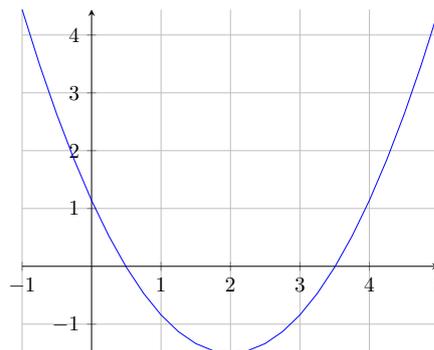
5. Répondre aux questions suivantes après les avoir traduites en termes d'équations :

(a) Combien de fois les graphes des fonctions  $x \mapsto \exp(2x-1)$  et  $x \mapsto \exp(x)$  se croisent-ils ?

(b) Combien de fois les graphes des fonctions  $x \mapsto e^x$  et  $x \mapsto 2^{x+1}$  se croisent-ils ?

6. Soient  $a, b, c$  trois réels. Sachant que le graphe de la fonction  $x \mapsto ax^2+bx+c$  est représenté ci-contre, déterminer le signe des réels :

- $a$ ,
- $b$ ,
- $c$ ,
- $b^2-4ac$ ,
- $a+b+c$ ,
- $a-b+c$ .



7. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction numérique définie par  $x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$ .

(a) Soit  $y \in \mathbb{R}$ . Déterminer, en distinguant les cas, le nombre d'antécédents de  $y$  par  $f$ .

(b) Déterminer l'ensemble-image de  $f$ .

(c) Montrer que  $f([-1; 1]) \subset [-1; 1]$ . Ces deux ensembles sont-ils égaux ?

## Composition

8. Soient  $f : x \mapsto x^2 + 1$  et  $g : x \mapsto \ln(x)$ .

- (a) Exprimer les fonctions  $f \circ g$  et  $g \circ f$  et déterminer leurs domaines de définition.
- (b) Déterminer les ensembles-images de  $g \circ f$  et  $f \circ g$ .

9. On considère les fonctions numériques  $f : x \mapsto \frac{x-1}{x+1}$  et  $g : y \mapsto \sqrt{y}$ .

- (a) Déterminer les domaines de définitions respectifs de  $f$  et  $g$ .
- (b) Calculer les composées  $g \circ f$  et  $f \circ g$ , puis préciser leurs domaines de définition.
- (c) Déterminer les ensembles-images de  $g \circ f$  et  $f \circ g$ .

## Étude de fonction

### Parité/imparité

10. Soit  $f$  une fonction impaire telle que  $0 \in D_f$ . Que vaut  $f(0)$  ?

11. Étudier la parité (ou l'imparité) des fonctions suivantes :

- (a)  $x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$
- (b)  $x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
- (c)  $x \mapsto \frac{1}{e^x - 1} + \frac{1}{2}$
- (d)  $x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
- (e)  $x \mapsto \ln(|1+x|) - \ln(|1-x|)$
- (f)  $x \mapsto \frac{1}{e^x + 1} - \frac{1}{2}$

12. Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  paires ou impaires.

- (a) Dans chacun des quatre cas, déterminer si  $g \circ f$  est paire ou impaire.
- (b) Même question pour  $f \times g$ .
- (c) La fonction  $f + g$  est-elle nécessairement paire ou impaire ?

### Calcul de dérivées

13. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

- (a)  $x \mapsto \frac{1+x}{1+e^x} - x$
- (b)  $x \mapsto \frac{e^{2x}}{x^2 - 1}$
- (c)  $x \mapsto \ln\left(2x - \frac{3}{x}\right)$
- (d)  $x \mapsto e^{x^2} \ln(1+x)$
- (e)  $x \mapsto \sqrt{\frac{2-x}{1+x}}$
- (f)  $x \mapsto \frac{1}{1 + \exp(\frac{1}{x})}$

14. On considère la fonction  $f : x \mapsto (1-x^2) \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ .

- (a) Déterminer le domaine de définition  $D_f$  de la fonction  $f$ .
- (b) Étudier la parité de  $f$ .
- (c) Calculer la dérivée de  $f$ .

15. Étudier les variations des fonctions suivantes :

- (a)  $x \mapsto x^3 - 3x + 1$
- (b)  $x \mapsto \frac{1}{x^2 + 1}$
- (c)  $x \mapsto \frac{x}{x^2 - 1}$
- (d)  $x \mapsto 3x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 72x + 1$
- (e)  $x \mapsto \frac{x}{1 + e^x}$
- (f)  $x \mapsto \ln(e^x + e^{-x})$

16. Soit  $\varphi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $x \mapsto \left(1 + \frac{1}{x}\right) \exp\left(\frac{1}{x}\right) + 1$ .

- (a) Étudier les variations de  $\varphi$ .
- (b) En déduire le signe de  $\varphi(x)$  pour  $x \in \mathbb{R}_+^*$ .