Limites des suites
Exercices

Lycée Carnot, E1A

Définition de la convergence

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels qui tend vers un réel $\ell > 0$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, u_n est strictement positif.

2. Soit $\ell \in \mathbb{R}$ et (u_n) une suite telle que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont toutes les deux convergentes de limite ℓ. Montrer que (u_n) converge vers ℓ.

3. *Quelques démonstrations du cours ...*

(a) On suppose que (u_n) et (v_n) convergent vers 0.
Montrer que $u_n v_n$ tend vers 0.

(b) On suppose que (u_n) converge vers ℓ et (v_n) converge vers ℓ'.
Montrer que $(u_n - \ell)(v_n - \ell')$ tend vers 0 et en déduire la limite de $u_n v_n$.

(c) On suppose $u_n > 0$ (à partir d'un certain rang) et $u_n \to 0$.
Montrer que $1/u_n \to +\infty$.

(d) On suppose que $u_n \to +\infty$. Montrer que $1/u_n \to 0$.

Calculs pratiques de limites

4. (a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1 - 3n^7 + 5n - n^3}{n^2 + 1}$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n\, n^2 + 3n}{n^2 + \sqrt{n}}$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}} + 2}{e^{\ln n + 3} - 5}$

(d) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 e^n - n e^{2n}}{n^3 \ln n - n\,(\ln n)^3}$

(e) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)^2 + 3n + 1}{\ln n + 5}$

(f) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3 - 5n\sqrt{n} + n - \ln n + n^{-1}}{e^{3n} - e^n + 1 - e^{-n}}$

(g) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2 + 2} - n$

(h) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 + n}$

(i) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}$

(j) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 3^n\, e^{-3n}$

(k) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n!}$

5. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$.

Cas des suites monotones

6. Soit la suite définie par $u_n = \dfrac{5^n}{n!}$ pour tout $n \geqslant 0$.

(a) Calculer les cinq premiers termes. La suite (u_n) semble-t-elle monotone ?

(b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante à partir de $n = 4$.

(c) Montrer que pour $n \geqslant 5$, $u_{n+1} \leqslant \dfrac{5}{6}\, u_n$.

(d) Soit la suite géométrique (v_n) de premier terme $v_5 = u_5$ et de raison $\dfrac{5}{6}$. Montrer que pour tout $n \geqslant 5$, on a $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.

(e) Déterminer la limite de (u_n).

7. On considère la suite (S_n) définie pour $n \geqslant 1$ par : $S_n = \sum_{k=1}^n \dfrac{1}{\sqrt{k}}$.

(a) Montrer que pour $n \geqslant 1$, on a : $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

(b) En déduire la limite de la suite (S_n).

(c) On pose $T_n = S_n - 2\sqrt{n}$. Démontrer par monotonie que (T_n) converge.

(d) Exhiber alors une suite (u_n) tel que : $\dfrac{S_n}{u_n} \to 1$.

8. (a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n!} \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

(b) Démontrer que $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ converge vers un réel $\ell \in]2,3]$ lorsque $n \to \infty$.

9. *D'après* `EDHEC 2001`. On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$

(a) Montrer que la suite est bien définie et à termes strictement positifs.

(b) En déduire que (u_n) est monotone.

(c) Pour tout k de $\mathbb{N}$, exprimer ${u_{k+1}}^2 - {u_k}^2$ en fonction de ${u_k}^2$.

(d) En déduire que pour tout $n > 0$: ${u_n}^2 = 2n + 1 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{{u_k}^2}$.

(e) En déduire que pour n non nul, ${u_n}^2 \geqslant 2n+1$ puis la limite de (u_n).

Suites adjacentes

10. On considère la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, puis que (S_n) converge.

11. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n\,n!}$

Montrer que ces deux suites sont adjacentes.

12. Soient (u_n) et (v_n) définies par les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_0 = 3 & \text{et} \quad v_0 = 11 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + v_n}{4} & \text{et} \quad v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases}$$

(a) Étudier la suite $(v_n - u_n)$. Calculer son terme général en fonction de n, quel est son signe ? Donner sa limite.

(b) Montrer que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante.
Que peut-on en déduire ?

(c) Étudier la suite $(u_n + v_n)$. Que conclure ?