Probabilités sur un univers fini
Exercices

Lycée Carnot, E1A

1. On joue 4 fois de suite à pile ou face et on considère les évènements suivants,

- A : « on obtient 2 fois pile et 2 fois face »,
- B : « les 2 premiers lancers ont donné des résultats différents ».

(a) Modéliser l'expérience par un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

(b) Calculer $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(A \cup B)$.

2. (Blaise Pascal et le chevalier de Méré) Soit $n \geqslant 1$ un entier. On effectue n lancers successifs d'un dé à six faces équilibré.

(a) Proposer un espace probabilisé fini qui modélise cette expérience.

(b) Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois un 6.

(c) Pour quelles valeurs de n cet événement est-il plus probable que son complémentaire ?

(d) Reprendre ces questions avec des lancers de 2 dés pour obtenir un double 6.

3. (Courses hippiques) On considère une course de 15 chevaux. Avec chacun des types de paris suivants, calculer la probabilité de gain pour un joueur qui parie au hasard.

(a) *Simple* : choix d'un seul cheval, pari gagnant s'il arrive premier.

(b) *Trio* : choix de 3 chevaux, pari gagnant s'ils prennent les 3 premières places.

(c) *Tiercé* : choix ordonné de 3 chevaux, pari gagnant s'ils prennent les 3 premières places dans cet ordre (pour le rapport de gain maximal).

(d) *2 sur 4* : choix de 2 chevaux, pari gagnant s'ils arrivent parmi les 4 premiers.

(e) *Multi* : choix de 7 chevaux, pari gagnant s'il contient les 4 premiers arrivés.

Jusqu'en 1954, les paris joués sont relativement simples : trouver le premier ou les deux premiers chevaux d'une course. Le PMU commence à proposer des paris plus originaux à partir de cette date afin d'attirer de nouveaux joueurs. Avec succès ! son chiffre d'affaire se porte aujourd'hui à plus de 10 milliards d'euros.

4. Un tiroir contient 10 paires de chaussettes toutes différentes dont les chaussettes ont été mélangées. On pioche au hasard 4 chaussettes.

(a) Quelle est la probabilité d'obtenir deux paires ?

(b) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une paire ?

(c) Quelle est la probabilité d'obtenir une seule paire.

5. On lance 7 fois de suite un même dé à 20 faces.

(a) Quelle est la probabilité d'obtenir des numéros distincts à chaque lancer ?

(b) Quelle est la probabilité d'obtenir toujours le même numéro ?

6. Une urne contient 8 boules numérotées de 1 à 8. On tire trois fois de suite une boule avec remise.

(a) Quelle est la probabilité d'obtenir 3 nombres dans un ordre strictement croissant ?

(b) Quelle est la probabilité d'obtenir 3 nombres dans un ordre croissant ?

7. On place au hasard cinq boules distinguables dans quatre boîtes également distinguables.

(a) Combien y a-t-il de rangements possibles ?

(b) Quelle est la probabilité que toutes les boules soient dans la même boîte ?

(c) Quelle est la probabilité que deux boîtes exactement soient vides ?

(d) Quelle est la probabilité qu'une boîte exactement soit vide ?

(e) En déduire la probabilité qu'aucune boîte ne soit vide.

(f) Retrouver ce résultat avec la formule du crible.

8. Une urne contient une boule bleue, une boule blanche et une boule rouge. On tire n fois de suite une boule dans cette urne, avec remise, et on considère les évènements suivants.

A : « la boule bleue n'apparait pas pendant les n tirages »,

B : « la boule blanche n'apparait pas pendant les n tirages »,

C : « la boule rouge n'apparait pas pendant les n tirages ».

On note p_n la probabilité que les trois couleurs apparaissent lors des n tirages.

(a) Calculer $\mathbb{P}(A \cup B \cup C)$.

(b) En déduire une expression de p_n en fonction de n.

(c) Calculer la limite de p_n lorsque $n \to \infty$, puis interpréter le résultat.

9. On considère un jeu de fléchettes sur une cible comportant 3 zones : Z_1, Z_2 et Z_3. On lance une fléchette sur la cible.
Pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, on note A_k l'évènement « la fléchette atteint la zone Z_k ».
Soit $\mathbb{P}$ une probabilité définie sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle qu'il existe un réel c vérifiant, pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, $\mathbb{P}(A_k) = c\,k$.

(a) Proposer un univers associé à cette expérience.

(b) Montrer que (A_1, A_2, A_3) forme un système complet d'évènements.

(c) Déterminer l'unique valeur possible pour c.

10. (d'après Stefan Banach) M. Atchoum a un paquet de n mouchoirs en papier dans chacune de ses deux poches. Chaque fois qu'il éternue, il choisit une poche au hasard pour prendre un mouchoir. Il répète ce comportement jusqu'à ce qu'il tombe sur un paquet vide.

(a) Montrer que la probabilité qu'il reste au moins un mouchoir dans l'autre paquet vaut :

$$1 - \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}}.$$

(b) Pour tout entier k entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, calculer la probabilité qu'il reste exactement k mouchoirs dans l'autre paquet.