Calcul matriciel
Exercices

Lycée Carnot, E1A

Opérations matricielles

1. Parmi ces matrices, lesquelles sont triangulaires supérieures ? inférieures ? diagonales ? inversibles ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -9 & 8 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Soit $X = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Calculer ${}^tXX$ et $X\,{}^tX$.

3. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer $A + B$, $2A - B$, AB, BA, ${}^t(AB)$ et ${}^tB\,{}^tA$.

(b) Calculer $3(A - 2B) + 2(3B + C) - (2A + C)$.

(c) Résoudre l'équation $A - 3X = 2B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

4. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Développer et simplifier $S = (2A)(3B) - (A + 2B)^2 + (A - B)(A + B)$.

(b) Même question pour $T = (A + B)(2A^2 - 2B) - 2A^2(A + B) + (-A + B)^2$.

5. Déterminer l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$.

Rappel : on dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est antisymétrique si :* $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ a_{i,j} = -a_{j,i}$.

6. Déterminer l'ensembles des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont à la fois :

(a) symétriques et triangulaires inférieures.

(b) antisymétriques et symétriques.

(c) antisymétriques et triangulaires supérieures.

7. Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$.

(a) On suppose A et B symétriques. Montrer que AB est symétrique si et seulement si $AB = BA$.

(b) Cette équivalence est-elle encore vraie lorsque A et B sont antisymétriques ?

(c) Si l'une est symétrique et l'autre antisymétrique ?

Trace d'une matrice carrée (hors-programme)

Pour toute matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*, on appelle* trace *de A le nombre* $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$.

8. Calculer la trace des matrices suivantes : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -9 \end{pmatrix}$, $I_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

9. (a) Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\ \mathrm{tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} {A_{i,j}}^2$.

(b) En déduire qu'il n'existe aucune matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ telle que : ${}^tAA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

10. (Propriétés remarquables de la trace) Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$.

(a) Pour tous $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, montrer que : $\operatorname{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \operatorname{tr}(A) + \mu \operatorname{tr}(B)$.

(b) Montrer que $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

(c) On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $AB - BA = \lambda I_n$.
À l'aide des questions précédentes, en déduire que $AB = BA$.

Calcul de puissances

11. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$.

12. Pour chacune des matrices M suivantes, calculer M^2, M^3, M^4 puis M^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

13. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = A - 2I$.

(a) Montrer que $B^2 = 3B$.

(b) En déduire par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = 2^n I + \dfrac{5^n - 2^n}{3} B$.

♡ **14**. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = A - I_3$.

(a) Calculer A^2 et A^3.

(b) Montrer que pour tout entier naturel n, il existe a_n et b_n réels tels que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et écrire les relations de récurrence vérifiées par les suites (a_n) et (b_n).

(c) En déduire une expression explicite de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(d) Calculer B^2, B^3 et en déduire B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(e) Retrouver le résultat de la question (c) à l'aide de la formule du binôme de Newton.

15. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer $(A - I)^2$ puis en déduire A^n pour tout entier $n \geqslant 2$.

16. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Vérifier que $A^2 = A + 2I$.

(b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists (u_n, v_n) \in \mathbb{R}^2,\ A^n = u_n A + v_n I$.
On précisera les relations de récurrence vérifiées par les suites (u_n) et (v_n).

(c) On pose $\alpha_n = 2u_n + v_n$ et $\beta_n = u_n - v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Expliciter les suites (α_n) et (β_n).

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en déduire u_n et v_n puis A^n

Matrices inversibles

17. Calculer l'inverse des matrices carrées suivantes par la méthode de Gauss-Jordan :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

♡ **18**. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer A^2, A^3 puis montrer que $A^3 - A^2 - A + I = 0$.

(b) En déduire que A est inversible et donner A^{-1}.

(c) Montrer que $B^3 - 3B^2 + 2B = 0$.

(d) En déduire que B n'est pas inversible.

19. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer $A^2 - A$ et $B^3 - B$.

(b) En déduire que A et B sont inversibles et calculer leurs inverses.

20. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ tel que $AB = A + I_n$.

(a) Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.

(b) En déduire que : $AB = BA$.

Applications aux suites récurrentes linéaires

21. On considère les deux suites réelles (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 3$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 6u_n - v_n \text{ et } v_{n+1} = u_n + 4v_n$$

(a) Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left(\begin{smallmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{smallmatrix}\right) = A \times \left(\begin{smallmatrix} u_n \\ v_n \end{smallmatrix}\right)$.

(b) Montrer qu'on peut décomposer A sous la forme $A = 5I + J$, où J est une matrice qui vérifie $J^2 = 0$. En déduire A^n pour tout $n \geqslant 0$.

(c) Obtenir alors les expressions de u_n et v_n en fonction de n.

22. On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 2,\ u_1 = 1,\ u_2 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$

On définit les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, Q = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) Vérifier que $Q = P^{-1}$.

(b) Que vaut $D = QAP$? En déduire D^n.

(c) Montrer que $\forall n \geqslant 0$, $A^n = PD^nQ$. En déduire les coefficients de A^n.

(d) Pour tout $n \geqslant 0$, on pose $X_n = \left(\begin{smallmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{smallmatrix}\right)$. Vérifier que $X_{n+1} = AX_n$ et en déduire une expression de u_n en fonction de n.