Continuité sur un intervalle
Exercices

Lycée Carnot, E1A

1. Soient a, b deux réels tels que $a < b$, et soit f une fonction continue sur $[a, b]$, croissante sur $]a; b[$.

(a) Soient x, y réels tels que $a < x < y < b$. Par passages à la limite, justifiez que :

$$f(a) \leqslant f(y) \quad \text{et} \quad f(x) \leqslant f(b), \quad \text{puis que} \quad f(a) \leqslant f(b).$$

(b) En déduire que f est croissante sur $[a, b]$.

(c) Montrer de même que si f croît strictement sur $]a; b[$, alors elle croît strictement sur $[a, b]$.

Théorème des valeurs intermédiaires

2. Soit P un polynôme de degré n impair.

(a) Déterminer les limites de P en $+\infty$ et en $-\infty$.

(b) En déduire que P admet au moins une racine réelle.

(c) Plus généralement, montrer que P est surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

3. Montrer que les équations suivantes ont au moins une solution :

(a) $\ln x = \dfrac{x^2 - 5}{x + 2}$ d'inconnue x dans $[1, 10]$.

(b) $x^{2019} - x^{2018} = -1$ d'inconnue x dans $[-1, 1]$.

(c) $x^n + 9x^2 - 4 = 0$ d'inconnue x dans $\mathbb{R}_+^*$ (n est un entier positif).

(d) $x \ln x = 2$ d'inconnue x dans $[2, 3]$.

4. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I.
On suppose que : $\forall x \in I,\ |f(x)| = 2019$. Montrer que f est constante.

5. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I.
On suppose que $f(I) \subset \mathbb{Z}$. Montrer que f est constante.

6. Soit f une fonction continue définie sur $[0, 1]$ et à valeurs dans $[0, 1]$.
Montrer que f admet un point fixe : $\exists x_0 \in [0, 1],\ f(x_0) = x_0$.

7. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$.
Montrer qu'il existe $(x, y) \in [0, 1]^2$ tels que $|x - y| = \frac{1}{2}$ et $f(x) = f(y)$.

8. Soit $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que :

$$f(0) = g(1) = 0 \ \text{ et } \ f(1) = g(0) = 1$$

Montrer que : $\forall \lambda \geqslant 0,\ \exists x_0 \in [0, 1],\ f(x_0) = \lambda\, g(x_0)$.
(on pourra considérer la fonction $h : x \mapsto f(x) - \lambda\, g(x)$)

Continuité sur un segment

9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
On suppose que f admet une limite finie en $+\infty$ et une limite finie en $-\infty$.

Montrer que f est bornée dans $\mathbb{R}$.

10. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $f(0) = 1$.
Montrer que f est bornée et admet un maximum. Admet-elle nécessairement un minimum ?

11. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui ne s'annule pas.
Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que pour tout $x \in [0, 1]$, $|f(x)| \geqslant m$.

Théorème de la bijection

12. On considère la fonction $f : x \mapsto -2 + x - \ln x$.

(a) Faire l'étude de la fonction f.

(b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[1, +\infty[$.

13. On considère la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x \ln x}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

Montrer que f réalise une bijection de son domaine D_f (à déterminer !) sur lui-même. *On démontrera avec soin que f est continue sur D_f.*

14. On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{(x+1)\ln(x+1)}{x}$.

(a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

(b) Calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathcal{D}_f$ puis déterminer son signe.
Pour ce faire, on pourra étudier la fonction auxiliaire $g : x \mapsto x - \ln(x+1)$ définie pour $x > -1$.

(c) Montrer que f peut être prolongée par continuité à $[-1, +\infty[$ et dresser son tableau de variation.

(d) Démontrer qu'il existe un unique $\alpha \in [-1, +\infty[$ tel que $f(\alpha) = 2$.

(e) Montrer que : $3 < \alpha < 4$.
On pourra utiliser le fait que : $\ln 2 \approx 0,69$ *et* $\ln 5 \approx 1,61$.

Suites définies implicitement

15. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}^+$, on note : $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + x - 1$.

(a) Dresser le tableau de variation de f_n sur $\mathbb{R}^+$.

(b) Montrer qu'il existe un unique u_n positif tel que $f_n(u_n) = 0$.

(c) Calculer u_1.

(d) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_{n+1}(x) > f_n(x)$.

(e) En déduire le signe de u_n et montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} < u_n$.

(f) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

(g) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\},\ f_n(x) = \dfrac{2x - x^{n+1} - 1}{1-x}$.

(h) En déduire que : $2\,u_n - 1 = u_n^{n+1}$.

(i) Démontrer que (u_n^{n+1}) converge vers 0 et en déduire la limite de (u_n).

16. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{1}{1+e^x} + nx$

(a) Déterminer, pour tout réel x, $f_n'(x)$ et $f_n''(x)$.

(b) En déduire que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

(c) Calculer les limites de f_n quand $x \to +\infty$ et $x \to -\infty$.

(d) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une seule solution sur $\mathbb{R}$.
On notera u_n cette solution.

(e) Montrer qu'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{-1}{n} < u_n < 0$.

(f) En déduire la limite de la suite (u_n).

(g) En revenant à la définition de u_n, montrer que : $n\,u_n \to -\dfrac{1}{2}$.

Théorème de la limite monotone

17. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et décroissante sur $\mathbb{R}$. On souhaite démontrer qu'il existe un unique réel c tel que $f(c) = c$ (on dit que c est un point fixe). Pour ce faire, on considère la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$.

(a) Démontrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

(b) En déduire que f admet un point fixe.

(c) En procédant par l'absurde, démontrer que ce point fixe est unique.

18. Posons $I =]0,1[$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que $f(I)$ est un intervalle. On souhaite démontrer que la fonction f est continue.

(a) Soit $a \in I$. Montrer que si f n'est pas continue en a, alors il existe deux réels ℓ_g et ℓ_d avec $f(0) \leqslant \ell_g < \ell_d \leqslant f(1)$ tels $f(I) \cap]\ell_g, \ell_d[= \emptyset$.

(b) En déduire que f est continue sur I.

(c) Le résultat est-il valable si f est décroissante ?

Remarque. Ce résultat est la brique manquante de la démonstration du théorème de la bijection présentée dans le cours.