

Systèmes linéaires

Exercices

Lycée Carnot, E1A

Pratique de la méthode du pivot de Gauss

1. Résoudre les systèmes suivants.

$$(a) \begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 5x - 8y = -6 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x + 2y + 2z = 2 \\ 6x + 5y + z = 3 \\ 2x + 2y + z = 4 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} -x + 5y = 5 \\ 2x + 7y + z = -6 \\ -9x + y - 7z = 0 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 1 \\ -x - 3y + 8z - 9t = 3 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} 2x - 3y + 4z = -25 \\ x + 2y - 3z = 20 \\ 3x + y - 2z = 14 \end{cases}$$

$$(f) \begin{cases} x + y = 4 \\ -y + z = -1 \\ -x - z = -2 \end{cases}$$

$$(g) \begin{cases} x + 2y + 3t = 1 \\ -y + 9z = 2 \\ -2y + 19z - t = 3 \\ 5x + 11y - 9z + 16t = 4 \end{cases}$$

2. Résoudre les systèmes suivants.

$$(a) \begin{cases} x - 2y + 5z = 13 \\ 2x + 4y - 5z = -12 \\ 3x - 2y - z = 3 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} 2y - z = 1 \\ -2x - 4y + 3z = -1 \\ x + y - 3z = -6 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x + y + z + t = 2 \\ 2x + y + z + t = 1 \\ x + 2y + 2z = 2 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x + 2y + 3z - 2t = 6 \\ 2x - y - 2z - 3t = 8 \\ 3x + 2y - z + 2t = 4 \\ 2x - 3y + 3z + t = -8 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ -x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$(f) \begin{cases} 3x + 2z = 0 \\ 3y + z + 3t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ 2x - y + z - t = 0 \end{cases}$$

3. Résoudre les systèmes suivants sous forme matricielle.

$$\begin{cases} x + y + z - 2t = -8 \\ x + y - 2z + t = 4 \\ x - 2y + z + t = -2 \\ 2x - y - z - t = -1 \end{cases}, \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

Résolution de systèmes linéaires paramétrés

4. Déterminer le nombre de solutions du système suivant en fonction des paramètres a, b, c . Préciser l'ensemble des solutions lorsque celui-ci est non vide.

$$\begin{cases} x + 2y - z = a \\ -2x - 3y + 3z = b \\ x + y - 2z = c \end{cases}$$

5. Résoudre, en discutant selon la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$, les systèmes suivants.

$$(a) \begin{cases} -mx - y = 0 \\ -3x + (2-m)y = 0 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} -mx - y = 0 \\ x - my = 0 \end{cases}$$

6. Résoudre, en discutant selon la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$, les systèmes suivants.

$$\begin{cases} (1-m)x + 2y - z = 0 \\ -2x - (3+m)y + 3z = 0 \\ x + y - (2+m)z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -(1+m)x + 2y + 3z = 0 \\ -x - my + z = 0 \\ x + y - (1+m)z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2-m)x - y + 5z = 0 \\ -x + (2-m)y + 7z = 0 \\ -x + 2y + (7-m)z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (3-m)x + y - 5z = 0 \\ - (1+m)y = 0 \\ 4x + y - (6+m)z = 0 \end{cases}$$

Utilisation des systèmes linéaires

7. On cherche un polynôme P de degré 3 qui vérifie $P(1) = P(-1) = P'(1) = 1$.

(a) Un tel polynôme existe-t-il ? Est-il unique ?

(b) Même question pour un polynôme P de degré 4 vérifiant : $\forall i \in \llbracket 0, 4 \rrbracket, P(i) = i$.

8. Cinq candidats ont obtenu les résultats suivants au concours de l'EM Winterfell. Déterminer les coefficients de chaque matière.

	Math.	Langues	ESH	Culture G.	Total
Arya	0	10	20	10	310
Jon	10	10	10	10	300
Robb	0	10	10	20	290
Sansa	0	20	10	10	280
Bran	20	5	5	5	270

9. (d'après EDHEC 2016) On considère l'application $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad g(x, y, z) = (3x - y + z, 2x + 2z, x - y + 3z).$$

(a) Cette application est-elle bijective ?

(b) Déterminer l'ensemble des $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $g(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$.

10. (d'après HEC 2013) Soit $f : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X]$ l'application qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ associe le polynôme $f(P)$ défini par :

$$f(P)(X) = -3XP(X) + X^2P'(X), \quad \text{où } P' \text{ est la dérivée de } P.$$

(a) Calculer $f(P)$ pour $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.
En déduire que l'application f est bien définie.

(b) Déterminer l'ensemble des $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tels que $f(P) = 0$.

(c) Expliciter l'ensemble-image $f(\mathbb{R}_3[X])$.

11. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 3, u_1 = 1, u_2 = 4$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n$.

(a) Déterminer trois réels a, b, c tels que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général $v_n = a + b \cdot n + c \cdot 2^n$ vérifie $v_0 = 3, v_1 = 1$ et $v_2 = 4$.

(b) Montrer par récurrence qu'on a alors : $\forall n \in \mathbb{N}, (v_{n+2}, v_{n+1}, v_n) = (u_{n+2}, u_{n+1}, u_n)$.

(c) En déduire une forme explicite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

12. Au maximum, combien d'opérations arithmétiques (multiplications et additions) faut-il pour mettre sous forme échelonnée un système de n équations à n inconnues par la méthode Gauss ?