Polynômes réels
Exercices

Lycée Carnot, E1A

Calculs dans l'ensemble des polynômes

1. Développer $(3X+2)^3$ et $(2X-1)^4$.

2. Factoriser directement les polynômes suivants, sans en chercher de racines :

(a) $2X^2 - 12X + 18$,

(b) $8X^2 - 32$,

(c) $(2X-6)(X+2) - (X+1)(X-3) + 2X(3-X)$,

(d) $(2X+1)^3 + (2X+1)^2 + 2X + 1$.

3. Calculer de tête :

(a) le coefficient de degré 1 du polynôme $(X-2)^2 + 5X$,

(b) le coefficient de degré 2 du polynôme $(2-X)^2 + (X+1)(3-5X)$.

Degré d'un polynôme

4. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(P^n) = n \deg(P)$.

5. Soient P et Q deux polynômes. À l'aide du degré, montrer que :

(a) Si $PQ = 0$, alors P ou Q est le polynôme nul.

(b) Si $PQ = 1$, alors P et Q sont constants.

Second degré, relations coefficients–racines

6. (a) Mettre $X^2 - 6X + 45$ sous forme canonique.

(b) Soit a un réel. Mettre $X^2 - 2aX + 5a^2$ sous forme canonique.

(c) Que peut-on en déduire pour le signe de $x^2 - 2ax + 5a^2$ si $x \in \mathbb{R}$?

7. Déterminer l'ensemble des réels (x, y) tels que : $\left\{ \begin{array}{lcll} x & + & y & = 9 \\ \ln(x) & + & \ln(y) & = \ln(14) \end{array} \right.$

Identification

8. Soit P le polynôme $X^3 + 4X^2 + X - 6$.

(a) Identifier trois réels a, b et c tels que $P = (X-1)(aX^2 + bX + c)$.

(b) En déduire les racines de P.

(c) Résoudre l'équation $e^{2x} + 4e^x + 1 - 6e^{-x} = 0$ (d'inconnue x dans $\mathbb{R}$).

9. Identifier a et b réels tels que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \quad \dfrac{2x-1}{x^2-1} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x-1}$.

10. Identifier a, b et c réels tels que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad \dfrac{x^2}{x+1} = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$.

11. (a) Identifier a, b et c réels tels que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, 1\}, \quad \dfrac{1}{x^3 - x} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x} + \dfrac{c}{x+1}$.

(b) Pour tout $n \geqslant 2$, en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{4}{k^3 - k}$ par simplifications télescopiques.

12. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (X+k)$ et on note respectivement a_n et b_n ses coefficients de degré $n-1$ et $n-2$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le degré de P_n, ses racines et ses coefficients de degrés n et 0.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1} = XP_n + (n+1)P_n$.

(c) En déduire par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} k$ et $b_n = \displaystyle\sum_{1 \leqslant k < \ell \leqslant n} k\ell$.

(d) Calculer a_n et b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Division euclidienne

13. Effectuer la division euclidienne de $X^4 - 5X^3 + 6X^2 + 4X - 5$ par $(X-2)^2$.

14. Soient $A = 2X^4 - X^3 + X - 2$ et $B = X^2 - 2X + 4$.

(a) Effectuer la division euclidienne de A par B.

(b) En déduire une relation entre A et B.

15. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Écrire l'égalité de division euclidienne de $P = X^n - 2$ par $X(X^2-1)$. Préciser les conditions que doit remplir le reste de cette division.

(b) En exprimant $P(0), P(1)$ et $P(-1)$ de deux façons différentes, déterminer le reste.

Racines et factorisation

16. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ admet au moins $n+1$ racines, alors $P = 0$.

17. Factoriser le polynôme $3X^2 - X - 2$ en trouvant une racine évidente, puis en déduire le domaine de définition de la fonction $x \mapsto \sqrt{3x^2 - x - 2}$.

18. Factoriser le polynôme $X^4 - 6X^2 + 7X - 6$, sachant qu'il admet deux racines évidentes. En déduire le domaine de définition de la fonction $x \mapsto \ln(x^4 - 6x^2 + 7x - 6)$.

19. Soit $P = X^5 + 5X^4 + 10X^3 + 11X^2 + 7X + 2$.

(a) Factoriser complètement P (commencer par chercher des racines évidentes).

(b) Résoudre l'inéquation $P(x) \geqslant 0$ d'inconnue x dans $\mathbb{R}$.

(c) Résoudre l'inéquation $\ln(x)^5 + 5\ln(x)^4 + 10\ln(x)^3 + 11\ln(x)^2 + 7\ln(x) + 2 > 0$.

20. Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$ les polynômes $X^2 + 2X + m - 4$ et $X^2 + X - 7m + 1$ ont-ils une racine commune ? Quelle est alors cette racine ?

21. Soit P le polynôme $225X^4 - 240X^3 + 94X^2 - 16X + 1$. On suppose qu'il existe a et b réels tels que $P = 225\,(X-a)^2(X-b)^2$ et $0 < a < b$.

(a) En exprimant $P(0)$ de deux façons différentes, montrer que $ab = \dfrac{1}{15}$.

(b) Montrer que P a pour dérivé $P' = 450(X-a)(X-b)(2X-a-b)$.

(c) En exprimant $P'(0)$ de deux façons différentes, montrer que $a + b = \dfrac{8}{15}$.

(d) En déduire a et b. L'hypothèse est-elle bien vérifiée ?

Équations polynomiales

22. Résoudre les équations polynomiales suivantes (d'inconnue x dans $\mathbb{R}$) :

(a) $x^2 + x + 1 = 0$,

(b) $2x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 0$,

(c) $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$,

(d) $(2x - 3)^2 = (7x + 5)^2$,

(e) $(x^2 - 3x + 4)^2 = (x^2 + 2x - 5)^2$,

(f) $(17x - 13)^2 + (2x + 15)^2 = (4x + 30)(17x - 13)$.

23. Résoudre les équations suivantes (d'inconnue x dans $\mathbb{R}$), en se ramenant à une équation polynomiale. *On prendra garde au domaine de définition des expressions manipulées.*

(a) $\dfrac{5}{3 - x} = 3 - \dfrac{x + 4}{3}$

(b) $x + \dfrac{2}{6 - \frac{3}{x-1}} = 1$

(c) $\dfrac{2}{x - 3} = 3$

(d) $\dfrac{5}{3x - 2} = \dfrac{1}{x - 4}$

24. Résoudre les équations suivantes (d'inconnue x dans $\mathbb{R}$), en se ramenant à une équation polynomiale. *On prendra garde au domaine de définition et au signe des expressions.*

(a) $x = \sqrt{x} + 2$,

(b) $x - 7 = \sqrt{x - 5}$,

(c) $\dfrac{1}{\sqrt{x} - 2} = -x$,

(d) $\sqrt{2 - x} = x + 4$,

(e) $\sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 3} - \sqrt{3x - 1} = 0$,

(f) $x + 1 = \sqrt{\frac{x}{6} + 6}$.

25. Pour tout réel m, résoudre l'équation $m^2\, x + 2m = 9x - 6$ d'inconnue x dans $\mathbb{R}$.
On pourra discuter selon la valeur du paramètre m.

26. Pour tout réel m, résoudre l'équation $m\, x^2 + (1 - m)x - 1 = 0$ d'inconnue x dans $\mathbb{R}$.
On pourra discuter selon la valeur du paramètre m.

27. On cherche à résoudre l'équation $x^4 + 8x^3 + 2x^2 + 8x + 1 = 0$ d'inconnue x dans $\mathbb{R}$.

(a) Justifier qu'on peut supposer $x \neq 0$.

(b) Montrer que cette équation équivaut alors à $x^2 + 8x + 2 + \dfrac{8}{x} + \dfrac{1}{x^2} = 0$.

(c) On pose $u = x + \dfrac{1}{x}$. Développer u^2 en fonction de x.

(d) Résoudre et conclure.