22 Variables aléatoires discrètes

Situations concrètes

22.1 Pour chaque variable aléatoire ci-dessous : donner son image et, si celle-ci est finie, donner la loi sous forme de tableau, puis calculer son espérance et tracer la fonction de répartition.

a) X_1 est le nombre de « piles » obtenus en lançant quatre pièces de monnaie.

b) X_2 est le minimum de deux dés à six faces.

c) X_3 est le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule blanche (on tire sans remise des boules dans une urne contenant 4 boules noires et 2 boules blanches).

d) X_4 est le produit de 4 nombres entiers tirés uniformément entre 0 et 2.

22.2 Pour chacune des variables aléatoires de l'exercice précédent, calculer les moments d'ordre 1, 2 et 3. Puis donner l'espérance, la variance et l'écart-type.

22.3 Un paquet de 10 cartes contient 5 as, 3 rois et 2 dames. Le tirage d'un as rapporte 5 points, celui d'un roi 2 points et celui d'une dame coûte 1 point. Du paquet on tire simultanément et au hasard 2 cartes. On désigne par X la variable aléatoire réelle discrète égale au total des points marqués.

Calculer la loi de X, son espérance et son écart-type.

22.4 On considère une urne contenant 1 boule rouge, 2 boules noires et 3 boules jaunes. On effectue des tirages successifs jusqu'à ce qu'il ne reste plus dans l'urne que deux couleurs différentes. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués. Déterminer la loi de X, son espérance, sa variance et son écart-type.

22.5 Un plateau est constitué de 25 cases. Derrière deux de ces cases se cache une bouteille de champagne. On fixe un entier $1 \leqslant n \leqslant 25$ et on retourne n cases au hasard. Soit X_n la variable aléatoire égale au nombre de bouteilles de champagne découvertes.

Déterminer la loi de X_n ainsi que son espérance et sa variance.

Transformations d'une variable aléatoire réelle discrète

22.6 Soient $p \in]0,1[$ et X une variable aléatoire réelle dont la loi est donnée par :

$$P([X=-1]) = \frac{p}{2}, \qquad P([X=0]) = 1-p, \qquad P([X=1]) = \frac{p}{2}$$

Déterminer la loi de $Y = X^2$.

22.7 Soient $p \in]0;1[$ et X, Y deux variables aléatoires réelles discrètes telles que X suit la loi $\mathcal{B}(1-p)$ et $Y = \min(X^2, 2X)$. Expliciter la loi de Y.

Lois usuelles

22.8 Calculer l'espérance et la variance des lois suivantes :

$$\mathcal{U}(\{-5,\dots,10\}),\quad \mathcal{B}\left(20,\frac{3}{7}\right),\quad \mathcal{G}\left(\frac{1}{10}\right),\quad \mathcal{P}\left(\frac{20}{17}\right).$$

22.9 On effectue un certain nombre de lancers indépendants d'une même pièce de monnaie et on note X la variable aléatoire qui donne le nombre de « pile » obtenus. On suppose que $E(X) = 42$ et $V(X) = 24$. La pièce est-elle bien équilibrée ? Déterminer le nombre de lancers.

22.10 On joue avec deux dés équilibrés à 6 faces. On jette un premier dé et on note sa valeur. On jette ensuite le deuxième dé jusqu'à ce qu'il indique le même numéro que le premier. Soit X le nombre de fois qu'il faut lancer le deuxième dé pour qu'il indique le même numéro que le premier.

a) Établir la loi de probabilité de X.

b) Déterminer son espérance et sa variance.

22.11 Soit X est une variable aléatoire réelle telle que : $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ P(X \geqslant t) = e^{-t}$. On pose $Y = \lfloor X \rfloor$.

a) Montrer que pour tout k entier naturel, $[Y = k] = [X \geqslant k] \cap \overline{[X \geqslant k+1]}$.

b) En déduire que $Y + 1$ suit la loi géométrique de paramètre $1 - e^{-1}$.

c) Déterminer enfin l'espérance et la variance de Y.

22.12 (Approximation Binomiale–Poisson) Soit λ un réel positif. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n une variable aléatoire telle que $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})$.

a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer la limite de $\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$ lorsque $n \to \infty$.

b) En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N},\ P([X_n = k]) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{k!}\lambda^k e^{-\lambda}$.

22.13 On sait que la probabilité qu'une personne soit allergique à un certain médicament est égale à 10^{-3}. On s'intéresse à un échantillon de 1000 personnes. On appelle X la variable aléatoire réelle dont la valeur est le nombre de personnes allergiques dans l'échantillon.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Justifier que cette loi peut être approchée par une loi de Poisson dont on donnera le paramètre. Estimer numériquement les probabilités des évènements suivants :
- Il y a exactement deux personnes allergiques dans l'échantillon.
- Il y a au moins deux personnes allergiques dans l'échantillon.

Espérance et théorème de transfert

22.14 Soit X une variable aléatoire discrète. Pour tout réel positif t tel que t^X admet une espérance, on pose $G(t) = E(t^X)$. Déterminer la fonction G ainsi définie (appelée *fonction génératrice* de X) pour chacune des lois usuelles :

a) loi certaine,

b) loi uniforme,

c) loi de Bernoulli,

d) loi binomiale,

e) loi géométrique,

f) loi de Poisson.

22.15 Soit $\lambda > 0$ et X une variable aléatoire réelle telle que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Calculer $E\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$.

22.16 Soit $p \in]0,1]$ et X une variable aléatoire réelle telle que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Calculer $E\left(\dfrac{1}{X}\right)$ à l'aide de la formule suivante :

$$\forall x \in]-1;1[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).$$

22.17 (Espérance d'une variable entière positive) Soit X une variable aléatoire réelle telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = P([X > n])$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P([X = n]) = u_{n-1} - u_n$, et en déduire que :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=1}^{N} n\, P([X = n]) = -N\, u_N + \sum_{n=0}^{N-1} u_n$$

b) On suppose que $\sum u_n$ converge*. Montrer que X admet une espérance et :

$$E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} P([X > n]).$$

* *On pourra admettre que sous cette hypothèse,* $N u_N \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$.

c) Retrouver l'espérance de la loi géométrique à l'aide de cette formule.

d) En remarquant que $N\,P([X = k]) \leqslant k\,P([X = k])$ pour tous N et k entiers naturels tels que $k > N$, démontrer le résultat admis.

Sujet de concours

22.18 Un joueur lance successivement n boules au hasard dans N cases numérotées de 1 à N (avec $N \geqslant 2$), chaque boule ayant une probabilité $1/N$ de tomber dans chacune des N cases (et les lancers de boules étant indépendants les uns des autres). On cherche à étudier la variable aléatoire T_n, égale au nombre de cases non vides après n lancers.

a) Déterminer en fonction de n et de N les valeurs prises par T_n.

b) Donner les lois de T_1 et de T_2.

c) Déterminer, lorsque $n \geqslant 2$, les probabilités $P([T_n = 1])$, $P([T_n = 2])$ et $P([T_n = n])$ (en distingant suivant que $n \geqslant N$ ou $n > N$).

d) À l'aide de la formule des probabilités totales, prouver que si $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$P([T_{n+1} = k]) \;=\; \frac{k}{N} P([T_n = k]) + \frac{N-k+1}{N} P([T_n = k-1])$$

e) Dans les questions qui suivent le polynôme, on considère le polynôme

$$G_n(x) = \sum_{k=1}^{n} P([T_n = k])x^k$$

Quelle est la valeur de $G_n(1)$?

f) Exprimer $E(T_n)$ en fonction de $G_n'(1)$.

g) En utilisant la relation démontrée à la question ***d.***, montrer que

$$G_{n+1}(x) = \frac{1}{N}(x - x^2)G_n'(x) + x\,G_n(x)$$

h) Dériver l'expression précédente et en déduire que

$$E(T_{n+1}) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)E(T_n) + 1$$

i) Prouver enfin que : $E(T_n) = N\left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right)$ et déterminer la limite de $E(T_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

Complément : loi hypergéométrique

22.19 Une urne contient 10 boules rouges et 5 boules vertes. On pioche simultanément 6 boules et on note R (resp. V) le nombre de boules rouges (resp. vertes) obtenues.
Déterminer la loi, l'espérance et la variance de R (resp. V).

22.20 Une urne contient 2 boules blanches et 8 boules noires. Un joueur tire successivement 5 boules. Soit B le nombre de boules blanches et N le nombre de boules noires.

a) On suppose que les tirages sont sans remise.

i. Déterminer la loi de B (resp. N).

ii. Calculer $E(B)$, $V(B)$ (resp. $E(N)$, $V(N)$).

b) Refaire les questions précédentes lorsque les tirages sont avec remise.

22.21 Une urne contient 2 boules blanches et 8 boules noires. Un joueur tire successivement avec remise 5 boules. Chaque fois qu'il tire une boule blanche, il gagne 2 points, sinon il perd 3 points. Soit X le nombre de boules blanches tirées et Y le nombre de points obtenus.

a) Déterminer la loi de X, puis $E(X)$ et $V(X)$.

b) Exprimer Y en fonction de X.

c) En déduire la loi de Y, puis $E(Y)$ et $V(Y)$.

d) Que deviennent les résultats précédents si le jeu est sans remise ?