

21 Intégration sur un segment

Primitives à vue

21.1 Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_2^3 (t^2 + t + 1) dt$

c) $\int_0^2 \left(2x + 1 + \frac{3}{2t+3} \right) dt$

e) $\int_1^0 e^{2t} dt$

b) $\int_{\frac{3}{2}}^5 \frac{1}{1-2t} dt$

d) $\int_0^{\ln(5)} (5 + 4e^t - e^{2t}) dt$

f) $\int_{-3}^{-2} \frac{t}{t+1} dt$

21.2 Donner une primitive des fonctions suivantes sur le domaine maximal (à préciser).

a) $f(x) = xe^{-x^2}$

c) $f(x) = \frac{e^{1/x}}{x^2}$

e) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

b) $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}$

d) $f(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$

f) $f(x) = \frac{1}{x} \ln(x)^2$

21.3 Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_1^2 \frac{1}{(2x+1)^2} dx$

g) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1+4x}}$

m) $\int_1^2 \frac{e^x}{e^x - 1} dx$

b) $\int_{-2}^1 \frac{14}{(4-x)^3} dx$

h) $\int_1^{1/\ln(2)} 2^x dx$

n) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln(x)^2}$

c) $\int_e^2 \frac{\ln(x)}{x} dx$

i) $\int_2^1 e^x \left(\frac{1}{x} + \ln(x) \right) dx$

o) $\int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{1-x^3} dx$

d) $\int_{1/e^3}^{1/e^2} \frac{dx}{x \ln(x)}$

j) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{4x}{x^2+1} dx$

p) $\int_0^3 (5^x - x + 4) dx$

e) $\int_3^4 \frac{x-1}{x^2} dx$

k) $\int_1^e \frac{\ln(x)^2}{x} dx$

q) $\int_{\frac{1}{2}}^2 (x-1) \left(\frac{x^2}{2} - x + 3 \right) dx$

f) $\int_0^1 \frac{e^x + 1}{e^x + x} dx$

l) $\int_0^1 3e^{-\frac{x}{2}+1} dx$

21.4 (Décompositions en éléments simples) Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_0^1 \frac{t}{t+1} dt$

b) $\int_1^0 \frac{1}{t^2-4} dt$

c) $\int_0^1 \frac{1}{t^2+t-2} dt$

d) $\int_0^1 \frac{2t+5}{(t+1)^2} dt$

f) $\int_3^5 \frac{dt}{(t+1)(t-2)}$

h) $\int_1^0 \frac{-3t^2 - t + 18}{t^2 - 4} dt$

e) $\int_3^4 \frac{4}{t(t^2-4)} dt$

g) $\int_0^1 \frac{-6t^2 + t + 5}{2t+1} dt$

Intégration par parties

21.5 Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_0^1 x e^x dx$

d) $\int_0^1 x^3 e^{x^2} dx$

g) $\int_{-1}^1 x^2 e^x dx$

b) $\int_1^2 x \ln(x) dx$

e) $\int_1^2 \frac{x \ln(x)}{(1+x^2)^2} dx$

h) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} dx$

c) $\int_1^e (x-e) \ln(x) dx$

f) $\int_0^2 (2-x) e^{-x} dx$

i) $\int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^2)^2} dx$

Changement de variable

21.6 Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1}$ avec le changement de variable $u = e^x$,

b) $\int_3^4 \frac{dx}{x + 2\sqrt{x}}$ avec le changement de variable $u = \sqrt{x}$,

c) $\int_1^2 e^{\sqrt{x}} dx$ avec le changement de variable $u = e^{\sqrt{x}}$,

d) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$ avec le changement de variable $u = \sqrt{1+e^x}$,

e) $\int_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{3}} \frac{\sqrt{x^3+1}}{x} dx$ avec le changement de variable $u = \sqrt{x^3+1}$,

f) $\int_8^{27} \frac{1}{1+\sqrt{x^3}} dx$ avec le changement de variable $u = \sqrt[3]{x}$,

g) $\int_1^4 \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$, avec le changement de variable $u = \sqrt{x}$.

21.7 Calculer les intégrales suivantes par changement de variable. (*changement non précisé!*)

a) $\int_3^4 \frac{t}{\sqrt{t-2}} dt$

b) $\int_1^3 \frac{1}{t\sqrt{2t+1}} dt$

c) $\int_2^3 \ln(\sqrt[3]{t}-1) dt$

d) $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t\sqrt{t+1}}$

Découpage de l'intervalle d'intégration

21.8 Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{11}} \frac{[x]}{x} dx$

b) $\int_{-2}^5 \frac{|x+1|}{|x|+1} dx$

Étude et encadrement d'intégrales

21.9 On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie pour tout entier n strictement positif par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x} dx$$

- a) Calculer le premier terme u_1 de la suite.
- b) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de réels positifs.
- c) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante.
- d) Montrer que l'on a, pour tout entier n strictement positif : $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n}$.
- e) En déduire une fonction Scilab qui prend un entier n strictement positif et qui renvoie u_n , le n -ième terme de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
- f) Établir, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la double inégalité :

$$\frac{1}{n} \leq 2u_n \leq \frac{1}{n-1}$$

En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

- g) À l'aide de l'inégalité précédente, trouver un équivalent simple de u_n .

21.10 Calculer la limite : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2} \int_x^{x+\frac{1}{x}} e^{-u^2} du$.

Relation de récurrence et intégration par parties

21.11 On note $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$.

- a) À l'aide d'un raisonnement par encadrement, montrer que (I_n) converge vers 0.
- b) Montrer que pour tout entier $n > 0$ on a $I_n = \frac{e}{n+1} - \frac{1}{n+1} I_{n+1}$.
- c) Montrer que : $n I_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e$.

21.12 On note $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x dx$.

- a) À l'aide d'un encadrement, montrer que (I_n) converge vers 0.
- b) Montrer que $I_n = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$.
- c) En déduire que $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.

Sommes de Riemann

21.13 Calculer les limites des suites ci-dessous.

a) $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2}$

b) $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}$

c) $w_n = \left(\frac{(2n)!}{n^n n!} \right)^{\frac{1}{n}}$

Dérivée d'une intégrale à bornes variables

21.14 Dériver les fonctions suivantes.

a) $H_1 : x \mapsto \int_3^x e^{\sqrt{t}} dt$

e) $H_5 : x \mapsto \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{1+t+t^2}$

b) $H_2 : x \mapsto \int_n^x e^{\sqrt{t}} dt$ où $n \in \mathbb{N}$

f) $H_6 : x \mapsto \int_{-x}^x \sqrt{1+u^2} du$

c) $H_3 : x \mapsto \int_x^{n^2} e^{\sqrt{t}} dt$ où $n \in \mathbb{N}$

g) $H_7 : x \mapsto \int_{\sqrt{x}}^{e^x} \frac{s}{\ln(s)} ds$

d) $H_4 : x \mapsto \int_1^{x^2} e^{5\sqrt{3\ln(t)}} dt$

21.15 On note $F(x) = \int_x^{2x} \sqrt{1+t^4} dt$.

a) Donner l'ensemble de définition de F , puis donner le signe de F .

b) Montrer que pour tout $t \geq 0$: $t^2 \leq \sqrt{1+t^4} \leq 1+t^2$.

c) En déduire un encadrement de $F(x)$, pour $x \in [0, +\infty[$.

d) Montrer alors que : $\frac{F(x)}{x^3} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{7}{3}$.

e) Démontrer que F réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers un intervalle à préciser.