20 Variables aléatoires réelles

Dans tous les exercices ci-dessous, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ désigne un espace probabilisé sur lequel est défini une variable aléatoire X.

20.1 Soit $A \in \mathcal{A}$ un évènement. On note $\mathbf{1}_A : \Omega \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\omega \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

a) Déterminer l'ensemble $\mathbf{1}_A(\Omega)$ dans les trois cas suivants : $A = \Omega$, $A = \emptyset$, puis $A \notin \{\emptyset, \Omega\}$.

b) Soit x un réel. Exprimer l'ensemble $[\mathbf{1}_A \leqslant x]$ en fonction de x, à l'aide des évènements $\emptyset, A$ ou Ω.

c) En déduire que $\mathbf{1}_A$ est une variable aléatoire réelle discrète finie.

d) Quelle est la loi de $\mathbf{1}_A$?

20.2 Soit $p \in [0,1]$, et soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des évènements *mutuellement indépendants* tels que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $P(A_i) = p$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $X(\omega)$ le nombre d'évènements réalisés, c'est-à-dire : $X(\omega) = \operatorname{Card}(\{i \in [\![1,n]\!] \mid \omega \in A_i\})$.

a) Montrer que $X(\Omega) \subset [\![0,n]\!]$.

b) Exprimer les évènements $[X = n]$ et $[X = 0]$ à l'aide de $A_1, A_2, \ldots, A_n$.
En déduire $P([X = n])$ et $P([X = 0])$.

c) Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Combien existe-t-il de sous-ensembles de $[\![1,n]\!]$ de cardinal k ? Soit S un tel sous-ensemble. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on pose $B_i = A_i$ si $i \in S$ et $B_i = \overline{A_i}$ si $i \notin S$. Montrer que :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i\right) = p^k (1-p)^{n-k}.$$

d) *Application.* On lance 10 fois un dé à six faces. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 6 fois un résultat inférieur ou égal à 2 ?

20.3 **a)** Soit x un réel tel que $x \notin X(\Omega)$. Que vaut $P([X = x])$?

b) Montrer que pour tout a réel, $P([X > a]) = 1 - F(a)$.

c) On suppose dans cette question que $P(2018 < X \leqslant 2019) = 1$.

(i) Calculer les nombres $F(2019), F(2018), F(2020), F(2017)$.

(ii) Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle tel que $I \cap \,]2018, 2019] = \emptyset$. Que vaut $P([X \in I])$?

20.4 Soit x_0 un réel quelconque.

a) Rappeler sans démonstration les propriétés de la fonction F.

b) Justifier l'existence d'un réel ℓ, limite à gauche de F en x_0. Puis prouver que $F(x_0 - \frac{1}{n})$ tend vers ℓ lorsque $n \to \infty$.

c) Montrer que $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[X \leqslant x_0 - \frac{1}{n}\right] = [X < x_0]$.
Déduire de ce qui précède l'égalité : $P([X < x_0]) = \lim\limits_{x \to x_0^-} F(x)$.

d) Montrer que F est continue en x_0 si et seulement si $P([X = x_0]) = 0$.

e) Si X est une variable aléatoire discrète, à quelle condition F est-elle continue ?