18 Séries

Sommes partielles

18.1 (Télescopage) Calculer les sommes partielles des séries suivantes et en déduire leur nature.

$$\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right), \qquad \sum_{n\geqslant 1} \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right).$$

18.2 On considère la suite (a_n) définie par : $\begin{cases} a_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = e^{-a_n}\, a_n \end{cases}$

a) Montrer que la suite (a_n) est convergente et déterminer sa limite.

b) Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n = -\ln(a_{N+1})$.

c) En déduire la nature de la série de terme général (a_n).

18.3 On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 \in [0,1] \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2 \end{cases}$

a) Montrer que la suite (u_n) converge et donner sa limite.

b) Étudier la nature de la série $\sum u_n^2$ et donner sa somme, si elle existe.

c) Prouver que la série $\displaystyle\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est divergente.

d) En déduire la nature de $\sum u_n$.

Calculs explicites de sommes

18.4 (Séries usuelles) Étudier la nature et calculer la somme (si elle existe) des séries suivantes. On pourra discuter selon la valeur de x, dans les questions où un x intervient.

a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{7}{2^{2n-5}}$

b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{2^n}$

c) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n^2 x^n$

d) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{3^{2n+1}}$

e) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n n^2}{3^n}$

f) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{4n^2+5n}{5^n}$

g) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n-1}{3^n}$

h) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{3(-2)^n}{n!}$

i) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n+7}{2^n n!}$

j) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n(n-1)x^n}{n!}$

k) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^2 8^n}{n!}$

18.5 (Somme alternée) On admettra dans cet exercice que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

a) Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, justifier que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(2k-1)^2}$.

b) En déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$ puis $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

18.6 (Écriture décimale) Justifier que les premières décimales du nombre $\dfrac{1}{9801}$ sont :

$$0,00\,01\,02\,03\,04\,05\,06\,07\,08\,09\ldots 94\,95\,96\,97$$

Quelles sont les 6 décimales suivantes ? Avec quelle fraction obtenir $0,00\,01\,04\,09\,16\,25\,36\,49\,64\ldots$?

18.7 (Éléments simples) On considère la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

a) Déterminer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{a}{n+1} + \dfrac{b}{n+2} + \dfrac{c}{n+3}$.

b) En déduire que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge et calculer sa somme.

c) Calculer, par la même méthode, la somme de la série de terme général $\dfrac{1}{4n^2-1}$ pour $n \geqslant 1$.

Études de convergence par comparaisons et équivalents

18.8 Étudier la nature des séries suivantes, sans chercher à calculer leur somme.

a) $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n^2-n}$

b) $\displaystyle\sum_n \frac{1}{e^n+e^{-n}}$

c) $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n^4-3^n}$

d) $\displaystyle\sum_n \ln\left(\frac{n^2+n^4}{2n^4}\right)$

e) $\displaystyle\sum_n \sqrt{\frac{n+2}{n^3-5n+1}}$

f) $\displaystyle\sum_n \frac{\ln n}{2^n}$

g) $\displaystyle\sum_n \frac{1}{(3+(-1)^n)^n}$

h) $\displaystyle\sum_n \left(\frac{5n+1}{6n+2}\right)^n$

18.9 Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels telle que $\sum u_n$ converge.

a) En considérant la limite de (u_n), montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_0,\ u_n^2 \leqslant u_n$.

b) Établir alors la convergence de la série $\displaystyle\sum_n u_n^2$.

Sujet de concours

18.10 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

On appelle (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{f(u_n)} \end{cases}$$

a) Étudier la fonction f et dresser son tableau de variations.

b) Montrer que (u_n) est strictement positive et strictement décroissante.

c) En déduire que (u_n) est convergente et donner sa limite.
On pose pour tout entier n :

$$v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1$$

d) Montrer que v_n est strictement négatif.

e) Montrer que la suite (v_n) est convergente de limite nulle.

f) Simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 + v_k)$.

g) En déduire la nature de la série $\sum v_n$.

Dans la suite, on admettra que :

$$\forall x \in [0;1], \quad -x^2 \leqslant \frac{2}{e^x + e^{-x}} - 1 \leqslant -\frac{x^2}{4} \leqslant 0$$

h) En déduire la nature de la série $\sum u_n^2$.

i) En utilisant le résultat de l'exercice 18.9, déterminer la nature de $\sum u_n$.