17 Convexité

Inégalités

17.1 Démontrer les inégalités suivantes en étudiant la position des tangentes.

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant x+1$

b) $\forall x \in\ ]0,+\infty[,\ \ln(x) \leqslant x-1$

17.2 Établir les propositions suivantes en revenant à la définition de la convexité/concavité.

a) Pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\quad \exp\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \leqslant \dfrac{\exp(x)+\exp(y)}{2}$.

b) Pour tout $x \in [1;e]$, $\quad \ln(x) \geqslant \dfrac{x-1}{e-1}$.

Études de convexité et points d'inflexion

17.3 Étudier les fonctions suivantes, notamment la convexité et la présence de points d'inflexion. On finira en traçant les courbes.

a) $f(x) = \ln(1+x^2)$

b) $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

c) $f(x) = e^{\frac{1}{1-x}} + 2x - 3$

d) $f(x) = \dfrac{2\ln(x)+3}{x}$

e) $f(x) = -x^2 + 3x - \ln(x)$

17.4 Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $x \mapsto \dfrac{1}{\ln(x)}$.

a) Montrer qu'on peut prolonger f par continuité en 0 et étudier la dérivabilité du prolongement.

b) Étudier les variations et la convexité de f, montrer qu'elle possède un unique point d'inflexion.

c) Déterminer la tangente à la courbe de f en ce point puis tracer l'allure de la courbe de f.

Exercice de révision

17.5 (ESSEC II 2017) Soit f une application définie sur $[0;1]$ à valeurs dans $[0;1]$, continue et convexe sur $[0;1]$, telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. On note $\widetilde{f}$ l'application associée à f définie sur $[0;1]$ par $\widetilde{f}(x) = x - f(x)$.

a) Justifier que $\widetilde{f}$ est concave sur $[0;1]$.

b) Représenter dans un même repère le graphe des fonctions f et $x \mapsto x$ sur $[0,1]$. Donner une interprétation graphique de la fonction $\widetilde{f}$.

c) Montrer que : $\forall x \in [0,1],\ \widetilde{f}(x) \geqslant 0$.

d) Montrer qu'il existe $x_0 \in]0,1[$ tel que $\widetilde{f}(x_0) = \max_{x\in[0,1]} \widetilde{f}(x)$.

e) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$,

$$\begin{cases} \widetilde{f}(x) \geqslant \widetilde{f}(x_0)\dfrac{x}{x_0} & \text{si } x \leqslant x_0, \\ \widetilde{f}(x) \geqslant \widetilde{f}(x_0)\dfrac{x-1}{x_0-1} & \text{si } x \geqslant x_0. \end{cases}$$