16 Fonctions dérivées sur un intervalle

Accroissements finis et étude des suites récurrentes

16.1 Soit $f : x \mapsto \sqrt{x+1}$ et soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \end{cases}$

a) Montrer que $[0;2]$ est stable par f et que : $\forall x \in [0;2],\ |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.

b) Déterminer les points fixes de f. Notons r l'unique point fixe dans $[0;2]$.

c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - r| \leqslant \dfrac{|u_n - r|}{2}$ puis que $|u_n - r| \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

e) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

f) Déterminer un entier N tel que $|u_N - r| \leqslant 10^{-9}$.

g) Écrire un programme Scilab donnant une valeur approchée de r à 10^{-9} près.

16.2 On considère la fonction $f : x \mapsto e^{-x^2/2}$. On définit la suite (u_n) par : $\begin{cases} u_0 \in [0;1] \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[0;1]$, que l'on notera α.

b) Montrer que l'intervalle $[0;1]$ est stable par f. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0;1]$.

c) (i) Montrer que : $\forall x \in [0;1],\ |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{e}}$

(ii) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{e}}|u_n - \alpha|$.

(iii) Puis que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant e^{-n/2}$.

(iv) En déduire enfin que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Fonctions de classe $\mathcal{C}^n/\mathcal{C}^\infty$

16.3 On considère la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 1 + x & \text{si } x \geqslant 0 \\ e^x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

a) Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que f n'est pas deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

16.4 Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble de définition, les éventuels prolongements par continuité, et déterminer la classe la plus fine possible de la fonction (éventuellement prolongée). Donner l'équation des tangentes (si elles existent) aux points qui posent problème.

a) $f : x \mapsto e^{x + \frac{1}{x}}$

b) $f : x \mapsto x^2 \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$

c) $f : x \mapsto (1 - x)\sqrt{1 - x^2}$

d) $f : x \mapsto \sqrt{x}\, e^{-x}$

e) $f : x \mapsto x\sqrt{x+x^2}$

f) $f : x \mapsto \dfrac{x\sqrt{x}}{e^x - 1}$

Dérivées successives

16.5 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer la dérivée n-ième de :

a) $f : x \mapsto (x^2+1)e^x$

b) $g : x \mapsto x^2(1+x)^n$

c) $h : x \mapsto \frac{1}{1-x}$

16.6

a) Montrer qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{a}{1-x} + \dfrac{b}{1+x}$.

b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ième de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$.

Exercices de révision

16.7 On considère la fonction $f :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $x \longmapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$.

a) Calculer f'.

b) Montrer que : $\forall x \in]0;+\infty[,\ f''(x) = \dfrac{e^x}{(e^x-1)^3}(xe^x - 2e^x + x + 2)$.

c) Étudier les variations de la fonction $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $[0,+\infty[$, par :

$$g(x) = xe^x - 2e^x + x + 2.$$

En déduire : $\forall x \in]0;+\infty[,\ f''(x) > 0$.

d) On admet que $f'(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\frac{1}{2}$. En déduire le sens de variation de f, puis dresser le tableau de variation de f en précisant les limites en 0 et en $+\infty$.

e) Montrer $\forall x \in]0,+\infty[,\ \left|f'(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$ et $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

f) Résoudre l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in]0;+\infty[$.

g) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

Montrer $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \ln(2)| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \ln(2)|$.

h) Établir que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

16.8 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 4 + \dfrac{\ln(u_n)}{4}$.

a) Soit $f : x \mapsto 4 + \dfrac{\ln(x)}{4}$. Étudier la fonction f et montrer que $\left[1;e^2\right]$ est stable par f.

b) Étudier les variations de $f(x) - x$ sur $\left[1;e^2\right]$. En déduire que f possède un unique point fixe dans cet intervalle.

c) Montrer que pour tout n, u_n existe et appartient à l'intervalle $\left[1;e^2\right]$.

d) Étudier la monotonie de (u_n) et montrer qu'elle converge vers une limite L à préciser.

e) À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, déterminer une suite géométrique (v_n) de raison $q \in [0;1[$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - L| \leqslant v_n$.