15 Dérivabilité

Calcul de dérivées

15.1 Étudier l'ensemble de définition, la continuité puis la dérivabilité des fonctions suivantes. Puis exprimer la dérivée, quand elle existe.

a) $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x+1)^3}$

b) $f : x \mapsto x\sqrt{2-x}$

c) $f : x \mapsto x\ln(x) - x$

d) $f : x \mapsto x^{3x}$

e) $f : x \mapsto \ln(3x^2+2x)$

f) $f : x \mapsto e^{x^3-x}$

g) $f : x \mapsto \dfrac{x^2-3x+2}{3x+5}$

h) $f : x \mapsto (1-2x)e^{-2x}$

i) $f : x \mapsto \dfrac{x}{\ln(x)+1}$

j) $f : x \mapsto x^x$

k) $f : x \mapsto \dfrac{x}{\ln(x+1)}$

l) $f : x \mapsto x\lfloor x \rfloor$

m) $f : x \mapsto x^{x^x}$

n) $f : x \mapsto x^2 - 2|x|$

o) $f : x \mapsto 3^{4x^2-1}$

p) $f : x \mapsto \dfrac{x^3+2x^2-x+3}{2x^3-3x^2+x}$

q) $f : x \mapsto \sqrt{x}\ln(x)e^x$

r) $f : x \mapsto \dfrac{2x\sqrt{x}}{x+1}$

s) $f : x \mapsto \sqrt{3x+5-x^2}$

t) $f : x \mapsto x^{\ln(x)}$

u) $f : x \mapsto \ln(1+|x|)$

v) $f : x \mapsto \sqrt{x^2-x^3}$

w) $f : x \mapsto x|x|$

x) $f : x \mapsto \dfrac{x}{|x|+1}$

y) $f : x \mapsto \sqrt{x}^x$

Tangentes

15.2 Calculer l'équation des tangentes en 0, 1, -2 et $\sqrt{3}$ (quand elles existent) des fonctions suivantes :

a) $f : x \mapsto x^2 - 3x + 1$

b) $f : x \mapsto \sqrt{2x-1}$

c) $f : x \mapsto x\ln(x+3)$

d) $f : x \mapsto \sqrt{x^2+1}\,e^x$

Études de fonctions

15.3 Étude complète des fonctions suivantes (ensemble de définition, limites, éventuels prolongements par continuité, variations, allure de la courbe) :

a) $f : x \mapsto \sqrt{x+1}\,\ln(x+1)$

b) $f : x \mapsto x + \sqrt{x^2-1}$

c) $f : x \mapsto \ln(e^{2x} - e^x + 1)$

d) $f : x \mapsto \dfrac{x^2-3x+1}{2x^2-5x-3}$

e) $f : x \mapsto x^{1/x}$

f) $f : x \mapsto \dfrac{e^{2x}}{x^2-1}$

Dérivée d'une bijection réciproque

15.4 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

a) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle à préciser.

b) Dresser le tableau de variations de f^{-1}.

c) Quel est l'unique antécédent de 0 par f ? En déduire $(f^{-1})'(0)$.

d) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 1 - f(x)^2$. En déduire une expression de $(f^{-1})'$.

15.5 On note $f(x) = x e^x$.

a) Quel est l'ensemble de définition de f ? Étudier ses variations.

b) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans I, où I est un intervalle à préciser.

c) On note h la bijection réciproque. Déterminer sa dérivée h'.

d) Faire une étude complète de h (variations, allure de la courbe).

e) Justifier que l'équation $e^{-x} = 2x$ admet une unique solution réelle, et exprimer cette solution à l'aide de h.

Développement limité

15.6 Soit f une fonction dérivable en a.

Le but de l'exercice est de déterminer : $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{(f(a+3h))^2 - (f(a-h))^2}{h}$.

a) Montrer que la fonction $h : x \mapsto f(a+x)$ est dérivable en 0.

b) Écrire le dévelppement limité à l'ordre 1 de la fonction h en 0.

c) En déduire que $f(a+x)^2 = f(a)^2 + 2f(a)f'(a)x + o(1)x$ lorsque $x \to 0$.

d) Conclure.