

Devoir en temps libre

Formule du binôme de Newton

Lycée Carnot, E1A

à rendre le vendredi 19 octobre

Nous allons démontrer la formule du binôme de Newton par récurrence à l'aide de la formule de Pascal.

Soient a et b deux réels. À tout entier $n \in \mathbb{N}$, on associe la propriété $\mathcal{P}_n$: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

Initialisation. (et un peu plus)

1. À l'aide du triangle de Pascal, vérifier que $\mathcal{P}_0$, $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont vraies en explicitant les sommes.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie.

2. Expliciter la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ à démontrer.
3. Montrer que (compte tenu de l'hypothèse $\mathcal{P}_n$) :

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^n \left[\binom{n}{k} a^{n-k} b^k (a+b) \right]$$

4. En déduire que :

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^n \left[\binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k \right] + \sum_{k=0}^n \left[\binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \right]$$

5. Calculer $\binom{n}{0}$ et $\binom{n}{n}$, puis justifier que :

$$\sum_{k=0}^n \left[\binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k \right] = a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k \right]$$

6. En effectuant un changement d'indice, montrer de même que :

$$\sum_{k=0}^n \left[\binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \right] = \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k \right] + b^{n+1}$$

7. Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, justifier que : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$

8. À l'aide des questions précédentes, montrer que :

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k \right] + b^{n+1}$$

9. En déduire finalement que la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie puis conclure.