Devoir en temps libre n$^{\text{o}}$ 3
Questions ultra-classiques sur les matrices

E1A, Lycée Carnot

Soient P, Q, A, J les matrices définies par :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On notera I la matrice identité d'ordre 3.
Par convention, pour toute matrice carrée M d'ordre 3, on posera $M^0 = I$.

Inversibilité

1. (a) Calculer le produit PQ.
   (b) En déduire que P est inversible, et donner P^{-1}.
2. *Sans poser de calculs* :
   (a) Simplifier le produit QP.
   (b) Montrer que la matrice Q est inversible, et exprimer Q^{-1}.
3. On pose $B = P^{-1}AP$.
   (a) Calculer B. Justifier sans calcul qu'elle est inversible.
   (b) Calculer $B^2 - 4B$. En déduire une expression de B^{-1} en fonction de B.
4. (a) Exprimer A en fonction de B, P et P^{-1}.
   (b) En déduire que A est inversible et que $A^{-1} = I - \dfrac{1}{4}A$.
   (c) Retrouver ce résultat par la méthode de Gauss-Jordan.

Calcul de puissances

5. Calculer J^2, puis J^k pour tout entier $k \geqslant 2$.

6. (a) Déterminer deux réels α et β tels que $B = \alpha I + \beta J$.
   (b) À l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer, pour tout entier $n \geqslant 2$, la matrice B^n en fonction de I et de J. La formule obtenue est-elle encore valable pour $n = 1$? Pour $n = 0$?
   (c) Exprimer alors B^n sous la forme d'un tableau de nombres.
7. (a) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $A^n = PB^nP^{-1}$.
   (b) En déduire l'expression de A^n sous la forme d'un tableau de nombres.

Application

On définit les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$x_0 = 1,\ y_0 = -2,\ z_0 = 3 \text{ et les relations de récurrence}$$
$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = 2x_n \\ \forall n \in \mathbb{N},\ y_{n+1} = x_n + 3y_n - z_n \\ \forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = x_n + y_n + z_n \end{cases}$$

On pose, pour tout entier $n \geqslant 0$, $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

8. (a) Justifier que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $X_{n+1} = AX_n$.
   (b) Montrer, par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $X_n = A^nX_0$.
   (c) En déduire les expressions de x_n, y_n et z_n en fonction de n.

Préparation à la deuxième année

9. Résoudre le système suivant, en fonction du paramètre λ réel :

$$\begin{cases} (2-\lambda)x & & & & & = & 0 \\ x & + & (3-\lambda)y & - & z & = & 0 \\ x & + & y & + & (1-\lambda)z & = & 0 \end{cases}$$

On pourra être amené à distinguer les cas $\lambda = 2$ et $\lambda \neq 2$.