Devoir en temps libre

Lycée Carnot, E1A

à rendre le 28 janvier

Exercice 1

1. Soient p un entier naturel, P une fonction polynôme à coefficients réels, de degré p et Q la fonction polynôme définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = (x^2+1)P''(x) + 4P'(x) - 2P(x).$$

   (a) Montrer que, si $p \neq 2$, le degré de Q est égal à p et que, si $p = 2$, le degré de Q est strictement inférieur à p.

   (b) En déduire que Q n'est jamais de degré deux.

2. (a) Montrer que, si P est une fonction polynôme non nulle telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (x^2+1)P''(x) + 4P'(x) - 2P(x) = 0 \tag{1}$$

   alors P est de degré deux.

   (b) Soient (a, b, c) trois réels. Montrer que le polynôme $P = aX^2 + bX + c$ est solution de l'équation (1) si et seulement si (a, b, c) est solution du système :

$$\begin{cases} 4a - b = 0 \\ a + 2b - c = 0 \end{cases}$$

   (c) En déduire toutes les fonctions polynômes P solutions de l'équation (1).

3. On chercher toutes les fonctions polynômes P solutions de l'équation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (x^2+1)P''(x) + 4P'(x) - 2P(x) = x \tag{2}$$

   (a) Trouver une solution P_1 de degré un de l'équation (2).

   (b) Montrer qu'une fonction polynôme P est solution de l'équation (2) si et seulement si $P - P_1$ est solution de l'équation (1).

   (c) En déduire les fonctions polynômes solutions de l'équation (1).

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\begin{cases} \forall x > 0, \; f(x) = \dfrac{-x\ln(x)}{1+x^2} \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1. Vérifier que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.