Devoir en temps libre n° 2

Lycée Carnot, E1A

(correction)

Exercice 1 (d'après EDHEC 1994)

1. Soient p un entier naturel, P une fonction polynôme à coefficients réels, de degré p et Q la fonction polynôme définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = (x^2+1)P''(x) + 4P'(x) - 2P(x).$$

a) Montrer que, si $p \neq 2$, le degré de Q est égal à p et que, si $p = 2$, le degré de Q est strictement inférieur à p.

Solution. Commençons par traiter le cas $p \leqslant 2$. Il existe alors trois réels uniques a, b, c tels que $P = aX^2 + bX + c$, donc $P' = 2aX + b$ et $P'' = 2a$, de sorte que :

$$\begin{aligned} Q &= (X^2+1)2a + 4(2aX+b) - 2(aX^2+bX+c) \\ &= (8a-2b)X + (2a+4b-2c). \end{aligned}$$

Ceci montre déjà que $\deg(Q) < 2$. En particulier $\deg(Q) < p$ lorsque $p = 2$.

- Si $p = 0$, alors $a = b = 0$ et $c \neq 0$ donc $Q = -2c$ est bien de degré 0.
- Si $p = 1$, alors $a = 0$ et $b \neq 0$ donc $Q = -2bX + (4b - 2c)$ est bien de degré 1.

Considérons maintenant le cas $p \geqslant 3$ et notons a le coefficient de degré p de P (par définition du degré, $a \neq 0$). Les termes dominants de P' et P'' sont alors apX^{p-1} et $ap(p-1)X^{p-2}$, donc $\deg(P') = p-1$ et $\deg(P'') = p-2$, ce qui entraîne $\deg(Q) \leqslant p$ par produit et sommes de polynômes. De plus, Q a pour terme de degré p :

$$ap(p-1)X^p + 0 - 2aX^p \;=\; a\Big(p(p-1)-2\Big)X^p.$$

Or $p \geqslant 3$, donc $p(p-1) \geqslant 6$ et $a\Big(p(p-1)-2\Big) \neq 0$. Ainsi, on a bien $\deg(Q) = p$.

b) En déduire que Q n'est jamais de degré deux.

Solution. Il suffit de distinguer deux cas d'après la question précédente :

- Si $p = 2$, alors $\deg(Q) < p$ et donc $\deg(Q) \neq 2$.
- Si $p \neq 2$, alors $\deg(Q) = p$ et donc $\deg(Q) \neq 2$.

2. c) Montrer que, si P est une fonction polynôme non nulle telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (x^2+1)P''(x) + 4P'(x) - 2P(x) = 0 \tag{1}$$

alors P est de degré deux.

Solution. Supposons que cette condition soit vérifiée, c'est-à-dire que Q soit le polynôme nul. Alors $p \neq 2$ est impossible d'après les questions précédentes, car sinon Q serait aussi de degré $p \in \mathbb{N}$ alors que le polynôme nul est de degré $-\infty$. Donc $p = 2$.

d) Soient (a, b, c) trois réels. Montrer que le polynôme $P = aX^2 + bX + c$ est solution de l'équation (1) si et seulement si (a, b, c) est solution du système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 4a & - & b & & & = & 0 \\ a & + & 2b & - & c & = & 0 \end{array}\right.$$

Solution. D'après le premier calcul effectué à la question 1.(a), on sait que P est solution de (1) si et seulement si :

$$(8a - 2b)X + (2a + 4b - 2c) \;=\; 0,$$

ce qui équivaut à $8a - 2b = 0$ et $2a + 4b - 2c = 0$ par identification des coefficients. On obtient le système demandé en simplifiant par 2 ces deux équations.

e) En déduire toutes les fonctions polynômes P solutions de l'équation (1).

Solution. On peut remarquer que ce système linéaire est déjà échelonné en changeant l'ordre des lignes et des colonnes :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} - & c & + & 2b & + & a & = & 0 \\ & & - & b & + & 4a & = & 0 \end{array}\right.$$

Il est compatible, avec deux pivots pour trois inconnues. L'ensemble des solutions est donc infini, et on peut le paramétrer avec $a = \lambda$ où λ est un réel quelconque :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} - c & + & 2b & + & a & = & 0 \\ & - & b & + & 4a & = & 0 \\ & & & & a & = & \lambda \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcl} - c & + & 2b & & = -\lambda \\ & - & b & & = -4\lambda \\ & & & a & = \lambda \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} - c & & & & = -9\lambda \\ & - & b & & = -4\lambda \\ & & & a & = \lambda \end{array}\right.$$

Finalement, $aX^2 + bX + c$ est donc solution de (1) si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(a, b, c) = (\lambda, 4\lambda, 9\lambda)$. Puisque cette équation n'admet pas de solution non nulle de degré $p \neq 2$, on en déduit que les solutions sont exactement les polynômes

$$\boxed{P = \lambda X^2 + 4\lambda X + 9\lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{R}}$$

où λ est un réel quelconque (avec $\lambda = 0$ si et seulement si P est le polynôme nul).

3. On cherche toutes les fonctions polynômes P solutions de l'équation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (x^2 + 1)P''(x) + 4P'(x) - 2P(x) = x \tag{2}$$

f) Trouver une solution P_1 de degré un de l'équation (2).

Solution. On peut chercher P_1 sous la forme $P_1 = aX+b$ avec a, b réels tels que $a \neq 0$. Puisque $P_1' = a$ et $P_1'' = 0$, il est solution de (2) si et seulement si $4a - 2(aX+b) = X$, c'est-à-dire $-2aX + (4a-2b) = X$. Il suffit donc de prendre $a = -\frac{1}{2}$ et $b = -1$, c'est-à-dire

$$\boxed{P_1 = -\frac{1}{2}X - 1}.$$

g) Montrer qu'une fonction polynôme P est solution de l'équation (2) si et seulement si $P - P_1$ est solution de l'équation (1).

Solution. Puisque P_1 est solution de (2), on sait que $X = (X^2+1)P_1'' + 4P_1' - 2P_1$ et donc :

$$\begin{aligned}(X^2+1)P'' + 4P' - 2P = X &\Leftrightarrow (X^2+1)(P'' - P_1'') + 4(P' - P_1') - 2(P - P_1) = 0\\ &\Leftrightarrow (X^2+1)(P-P_1)'' + 4(P-P_1)' - 2(P-P_1) = 0,\end{aligned}$$

la deuxième équivalence étant justifiée par linéarité de la dérivation.

h) En déduire les fonctions polynômes solutions de l'équation (2).

Solution. D'après les trois questions précédentes, P est solution de (2) si et seulement si il existe λ réel tel que $P - P_1 = \lambda X^2 + 4\lambda X + 9\lambda$. Les solutions sont donc les polynômes

$$P = P_1 + \lambda X^2 + 4\lambda X + 9\lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

c'est-à-dire $\boxed{P = \lambda X^2 + \left(4\lambda - \frac{1}{2}\right)X + (9\lambda - 1)}$ avec λ réel quelconque.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\begin{cases}\forall x > 0,\ f(x) = \dfrac{-x\ln(x)}{1+x^2}\\ f(0) = 0\end{cases}$

4. Vérifier que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Solution.

- Sur l'intervalle ouvert $]0;+\infty[$, la fonction f est continue par somme, produit et quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions continues.
- Étudions la continuité en 0, ce qui revient à la continuité à droite car 0 est l'extrémité gauche de l'intervalle $[0;+\infty[$. Pour $x > 0$,

  $$1 + x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 1, \qquad \text{et} \qquad x\ln(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \quad \text{(par croissances comparées)}$$

  donc $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ par quotient, d'où la continuité à droite en 0 car $f(0) = 0$.

Remarque. Ceci montre aussi que $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -x\ln(x)$.

5. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Solution. Pour $x > 0$, on peut factoriser le dénominateur par le terme dominant x^2 :

$$f(x) = \frac{-x\ln(x)}{x^2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{x^2}+1} = -\frac{\ln(x)}{x} \cdot \frac{1}{\frac{1}{x^2}+1}$$

Le premier facteur tend vers 0 par croissances comparées (en $+\infty$) et le deuxième facteur tend vers 1, donc par produit :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}.$$

Remarque. Ceci montre aussi que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln(x)}{x}$.