Devoir en temps libre
Formule du binôme de Newton

Lycée Carnot, E1A

à rendre le vendredi 19 octobre

Nous allons démontrer la formule du binôme de Newton par récurrence à l'aide de la formule de Pascal.

Soient a et b deux réels. À tout entier $n \in \mathbb{N}$, on associe la propriété $\mathcal{P}_n$: $\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k}$

Initialisation. (et un peu plus)

1. Á l'aide du triangle de Pascal, vérifier que $\mathcal{P}_0$, $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont vraies en explicitant les sommes.

— Pour $n = 0$, on a d'une part $(a+b)^0 = 1$ et d'autre part :

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{0-k} b^k = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1, \qquad \text{d'où } \mathcal{P}_0.$$

— Pour $n = 1$, on a d'une part $(a+b)^1 = a + b$ et d'autre part :

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} b^k = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 = a + b, \qquad \text{d'où } \mathcal{P}_1.$$

— Pour $n = 2$, on a d'une part $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$ et d'autre part :

$$\sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} a^{2-k} b^k = \binom{2}{0} a^2 b^0 + \binom{2}{1} a^1 b^1 + \binom{2}{2} a^0 b^2 = a^2 + 2ab + b^2, \qquad \text{d'où } \mathcal{P}_2.$$

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie.

2. Expliciter la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ à démontrer.

La proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est : $\boxed{(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k}\, b^k}$

3. Montrer que (compte tenu de l'hypothèse $\mathcal{P}_n$) :

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k (a+b) \right]$$

Par règle de calcul sur les puissances entières,

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)^1\, (a+b)^n \\
&= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k && \text{d'après } \mathcal{P}_n, \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k (a+b) && \text{par linéarité.}
\end{aligned}$$

4. En déduire que :

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} a^{n+1-k}\, b^k\right] + \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} a^{n-k}\, b^{k+1}\right]$$

On a par distributivité $a^{n-k}\, b^k(a+b) = a^{n+1-k}\, b^k + a^{n-k}\, b^{k+1}$, donc :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k (a+b) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} a^{n+1-k}\, b^k + \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^{k+1}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} a^{n+1-k}\, b^k\right] + \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} a^{n-k}\, b^{k+1}\right] && \text{par linéarité.}
\end{aligned}$$

5. Calculer $\binom{n}{0}$ et $\binom{n}{n}$, puis justifier que :

$$\sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} a^{n+1-k}\, b^k\right] = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} a^{n+1-k}\, b^k\right]$$

Puisque $0! = 1$, on obtient par définition : $\binom{n}{0} = \dfrac{n!}{0!\,(n-0)!} = \dfrac{n!}{n!} = 1$ et $\binom{n}{n} = \dfrac{n!}{n!\,(n-n)!} = 1$.

En isolant le terme d'indice $k = 0$ par additivité, on en déduit que :

$$\sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} a^{n+1-k}\, b^k\right] = \underbrace{\binom{n}{0} a^{n+1-0}\, b^0}_{a^{n+1}} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} a^{n+1-k}\, b^k\right]$$

6. En effectuant un changement d'indice, montrer de même que :

$$\sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} a^{n-k}\, b^{k+1}\right] = \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} a^{n+1-k}\, b^k\right] + b^{n+1}$$

On commence par isoler le terme d'indice $k = n$ par additivité, puis on pose $j = k + 1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} a^{n-k}\, b^{k+1}\right] &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[\binom{n}{k} a^{n-k}\, b^{k+1}\right] + \binom{n}{n} a^{n-n} b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left[\binom{n}{k} a^{n-k}\, b^{k+1}\right] + b^{n+1} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left[\binom{n}{j-1} a^{n+1-j}\, b^j\right] + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} a^{n+1-k}\, b^k\right] + b^{n+1}
\end{aligned}$$

La dernière égalité vient de ce que l'indice de sommation est muet.

7. Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, justifier que : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$

En posant $j = k - 1$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \binom{n}{j+1} + \binom{n}{j} && \text{car } k = j+1, \\
&= \binom{n+1}{j+1} && \text{d'après la formule de Pascal,} \\
&= \binom{n+1}{k} && \text{car } j+1 = k.
\end{aligned}$$

8. À l'aide des questions précédentes, montrer que :

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n+1}{k} a^{n+1-k}\, b^k \right] + b^{n+1}$$

En repartant du résultat des questions 4 à 6 :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} a^{n+1-k}\, b^k \right] + \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} a^{n-k}\, b^{k+1} \right] \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} a^{n+1-k}\, b^k \right] + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} a^{n+1-k}\, b^k \right] + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} a^{n+1-k}\, b^k + \binom{n}{k-1} a^{n+1-k}\, b^k \right] + b^{n+1} && \text{par linéarité,} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) a^{n+1-k}\, b^k \right] + b^{n+1} && \text{par factorisation,} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n+1}{k} a^{n+1-k}\, b^k \right] + b^{n+1} && \text{d'après la question 7.}
\end{aligned}$$

9. En déduire finalement que la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie puis conclure.

On s'intéresse au membre de droite de $\mathcal{P}_{n+1}$, en isolant par additivité le terme d'indice $k=0$ et le terme d'indice $k=n+1$, comme aux questions 5 et 6 :

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k}\, b^k = \underbrace{\binom{n+1}{0} a^{n+1}\, b^0}_{a^{n+1}} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n+1}{k} a^{n+1-k}\, b^k \right] + \underbrace{\binom{n+1}{n+1} a^0\, b^{n+1}}_{b^{n+1}},$$

ce qui coïncide bien avec le membre de droite du résultat de la question 8, d'où l'égalité $\mathcal{P}_{n+1}$.

Conclusion. Ceci achève la démonstration de l'hérédité : $\forall n \in \mathbb{N},\ (\mathcal{P}_n \implies \mathcal{P}_{n+1})$.
Puisqu'on a aussi vérifié $\mathcal{P}_0$, le principe de récurrence permet d'en déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}_n$.