Devoir surveillé n° 5

Lycée Carnot, E1A

le samedi 2 février 2019 (durée : 3h)

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur dénoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

Une roue de loterie se compose de secteurs identiques, numérotés de 1 à 12. Une personne fait tourner la roue devant un repère fixe. On suppose que chaque secteur a la même probabilité de s'arrêter devant ce repère.
À chaque partie un joueur mise une certaine somme d'argent en choisissant un, deux ou trois numéros sur les 12 ; il est gagnant si le secteur qui s'arrête devant le repère porte l'un des numéros qu'il a choisis.
Un joueur possédant un crédit illimité, effectue une suite de parties en adoptant la stratégie suivante :

— Il mise sur le chiffre 1 à la première partie.

— S'il perd à la n-ième partie, $n \geqslant 1$, il mise uniquement sur les chiffres 1 et 2 à la partie suivante et s'il gagne à la n-ième partie, il mise sur les chiffres 1, 3 et 5.

1. On note p_n la probabilité de l'événement A_n : « le joueur gagne la n-ième partie ».

a) Calculer les probabilités conditionnelles $P_{A_n}(A_{n+1})$ et $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$, puis en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_{n+1} = \frac{1}{12}\, p_n + \frac{1}{6}.$$

b) En déduire l'expression de p_n en fonction de n et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

2. Soit $k \in [\![1; n]\!]$, on note B_k l'événement : « le joueur gagne une seule fois au cours des n premières parties et ce gain a lieu à la k-ième partie ».

a) À l'aide de la formule des probabilités composées, calculer $P(B_n)$.

b) Soit $k \in [\![1; n-1]\!]$, calculer $P(B_k)$.

c) En déduire la probabilté q_n pour que le joueur gagne une seule fois au cours des n premières parties.

Exercice 2

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à 3. On désigne par f la fonction qui à tout polynôme P de E associe le polynôme $f(P)$ défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(P)(x) = P(x+1) + P(x).$$

3. Montrer que f est une application de E vers E.

4. Soient $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$ et $Q = b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3$ deux éléments de E.

a) Montrer que $f(P) = Q$ si et seulement si (a_0, a_1, a_2, a_3) est solution du système $(\mathcal{S})$ suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} 2a_0 & + & a_1 & + & a_2 & + & a_3 & = & b_0 \\ & & 2a_1 & + & 2a_2 & + & 3a_3 & = & b_1 \\ & & & & 2a_2 & + & 3a_3 & = & b_2 \\ & & & & & & 2a_3 & = & b_3 \end{array}\right.$$

b) En déduire que f est une bijection.

c) Résoudre le système $(\mathcal{S})$ lorsque $(b_0, b_1, b_2, b_3) = (0, 0, 0, 1)$. Que vaut $f^{-1}(X^3)$?

5. Soient $Q = X^3$ et $P \in E$ tel que $f(P) = Q$. On considère pour tout entier naturel strictement positif n la somme

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \, Q(k).$$

a) Exprimer simplement $S(n)$ en fonction de $(-1)^n$, $P(n+1)$ et $P(1)$.

b) Expliciter alors la valeur de $S(n)$ en fonction de n.

Exercice 3

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(x) = \frac{x\ln(x) - 1}{x},$$

ainsi que la fonction numérique f des variables réelles x et y définies par :

$$\forall (x, y) \in \left]0, +\infty\right[\times \left]0, +\infty\right[, \quad f(x, y) = \frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} + \frac{y^2}{2} + \exp\left(-\frac{1}{x}\right)$$

où exp désigne la fonction exponentielle.

I. Étude des zéros de φ

6. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives.
Interpréter graphiquement cette limite.

7. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, ainsi que la limite de $\dfrac{\varphi(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.

8. Justifier la dérivabilité de φ sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer sa dérivée.

9. Dresser le tableau de variation de φ en faisant apparaître les limites de φ en 0^+ et $+\infty$.

10. Prouver l'existence d'un unique réel $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\varphi(\alpha) = 0.$$

Justifier que $\alpha \in [1, e]$.

II. Étude d'une suite réelle

On considère la suite u définie par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} u_0 = e \,; \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \varphi(u_n) + u_n. \end{cases}$$

11. Démontrer que pour tout n entier naturel, u_n existe et $u_n > \alpha$.

12. Si cette suite est convergente de limite L, que peut valoir L ?

13. Prouver que la suite est strictement croissante.

14. La suite u est-elle convergente ?

15. Soit A un réel. Recopier et compléter le programme suivant afin qu'il affiche le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant A$:

```
function y = g(x)
  ...
endfunction

A = input("Entrer un réel A > 0 : ")
u = exp(1)
n = 0

while ...
  u = ...
  n = ...
end

disp(...)
```

III. Étude de f

On appelle *point critique* de f tout couple $(x, y) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ tel que $\partial_1 f(x, y) = 0$ et $\partial_2 f(x, y) = 0$.

16. Calculer les dérivée partielles de f.

17. Prouver que f possède un unique point critique noté A d'abscisse $x = \alpha$ et d'ordonnée $y = y_\alpha$ à déterminer en fonction de α.