Devoir surveillé n° 5

Lycée Carnot, E1A

le samedi 2 février 2019 (durée : 3h)

Exercice 1 (INSEEC 2002)

Une roue de loterie se compose de secteurs identiques, numérotés de 1 à 12. Une personne fait tourner la roue devant un repère fixe. On suppose que chaque secteur a la même probabilité de s'arrêter devant ce repère.
À chaque partie un joueur mise une certaine somme d'argent en choisissant un, deux ou trois numéros sur les 12 ; il est gagnant si le secteur qui s'arrête devant le repère porte l'un des numéros qu'il a choisis.
Un joueur possèdant un crédit illimité, effectue une suite de parties en adoptant la stratégie suivante :

— Il mise sur le chiffre 1 à la première partie.

— S'il perd à la n-ième partie, $n \geqslant 1$, il mise uniquement sur les chiffres 1 et 2 à la partie suivante et s'il gagne à la n-ième partie, il mise sur les chiffres 1, 3 et 5.

1. On note p_n la probabilité de l'événement A_n : « le joueur gagne la n-ième partie ».

a) Calculer les probabilités conditionnelles $P_{A_n}(A_{n+1})$ et $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$, puis en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_{n+1} = \frac{1}{12} p_n + \frac{1}{6}.$$

Solution. Conditionnellement à A_n, la partie numéro $n+1$ est gagnante si et seulement si la roue s'arrête sur le 1, le 3 ou le 5. Les 12 possibilités sont supposées *équiprobables*, donc on en déduit :

$$\boxed{P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}} \qquad \text{et, de même,} \qquad \boxed{P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}}$$

En considérant le système complet $(A_n, \overline{A_n})$, on a $P(\overline{A_n}) = 1 - P(A_n) = 1 - p_n$ et :

$$\begin{aligned}
P(A_{n+1}) &= P(A_n \cap A_{n+1}) + P(\overline{A_n} \cap A_{n+1}) && \text{(probabilités totales)}\\
&= P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\overline{A_n})P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) && \text{(probabilités composées)}\\
&= p_n \cdot \frac{1}{4} + (1 - p_n) \cdot \frac{1}{6}\\
&= \frac{1}{12} p_n + \frac{1}{6},
\end{aligned}$$

d'où le résultat demandé puisque $p_{n+1} = P(A_{n+1})$.

b) En déduire l'expression de p_n en fonction de n et déterminer $\lim_{n \to +\infty} p_n$.

Solution. La suite (p_n) est arithmético-géométrique. On résout l'équation des points fixes :

$$\frac{1}{12}x+\frac{1}{6}=x \iff \frac{1}{6}=\frac{11}{12}x \iff \boxed{x=\frac{2}{11}}.$$

On vérifie alors que, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
p_{n+1}-\frac{2}{11} &= \frac{1}{12}p_n+\frac{1}{6}-\frac{2}{11}\\
&= \frac{1}{12}\left(p_n-\frac{2}{11}\right)+\frac{2}{11\times 12}+\frac{1}{6}-\frac{2}{11}\\
&= \frac{1}{12}\left(p_n-\frac{2}{11}\right)+\frac{1+11-12}{11\times 6}\\
&= \frac{1}{12}\left(p_n-\frac{2}{11}\right).
\end{aligned}$$

Ceci montre que la suite de terme général $p_n-\frac{2}{11}$ est géométrique de raison $\frac{1}{12}$. Alors :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad p_n-\frac{2}{11}=\left(\frac{1}{12}\right)^n\left(p_0-\frac{2}{11}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

par convergence des suites géométriques car $\left|\frac{1}{12}\right|<1$. Donc par somme : $\boxed{p_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{2}{11}}$.

2. Soit $k\in[\![1;n]\!]$, on note B_k l'événement : « le joueur gagne une seule fois au cours des n premières parties et ce gain a lieu à la k-ième partie ».

   a) À l'aide de la formule des probabilités composées, calculer $P(B_n)$.

   Solution. Puisque la partie numéro n est la dernière, $B_n=\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\overline{A_{n-1}}\cap A_n$. Si $n\geqslant 2$, la formule des probabilités composées donne alors :

$$P(B_n)=P(\overline{A_1})P_{\overline{A_1}}(\overline{A_2})P_{\overline{A_1}\cap\overline{A_2}}(\overline{A_3})\cdots P_{\overline{A_1}\cap\cdots\cap\overline{A_{n-1}}}(A_n).$$

   Par équiprobabilité $P(\overline{A}_1)=\dfrac{11}{12}$ et, compte tenu des conditions de l'expérience,

$$P_{\overline{A_1}\cap\overline{A_2}}(A_3)=P_{\overline{A_2}}(A_3)=\frac{1}{6},\qquad \dots,\qquad P_{\overline{A_1}\cap\cdots\cap\overline{A_{n-1}}}(A_n)=P_{\overline{A_{n-1}}}(A_n)=\frac{1}{6}.$$

   On obtient donc, par probabilités complémentaires,

$$\forall n\geqslant 2,\quad P(B_n)=\frac{11}{12}\cdot\overbrace{\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{5}{6}}^{n-2\text{ facteurs}}\cdot\frac{1}{6}=\boxed{\frac{11}{72}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}}.$$

   Si $n=1$, on a en revanche $P(B_n)=P(A_1)=\dfrac{1}{12}$.

   b) Soit $k\in[\![1;n-1]\!]$, calculer $P(B_k)$.

   Solution. Cette fois $B_k=\overline{A_1}\cap\cdots\cap\overline{A_{k-1}}\cap A_k\cap\overline{A_{k+1}}\cap\cdots\cap\overline{A_n}$. Si $k\geqslant 2$, on obtient comme précédemment

$$P(B_k)=\frac{11}{12}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{k-2}\times\frac{1}{6}\times\frac{3}{4}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k-1}=\boxed{\frac{11}{96}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-3}}.$$

Si $k = 1$ (et $n \geqslant 2$), on obtient de même :

$$P(B_1) = \frac{1}{12} \times \frac{3}{4} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} = \boxed{\frac{3}{48}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}}.$$

c) En déduire la probabilté q_n pour que le joueur gagne une seule fois au cours des n premières parties.

Solution. On cherche $q_n = P(B_1 \cup \cdots \cup B_n)$ où les évènements (B_i) sont *deux à deux incompatibles*, donc par additivité :

$$q_n = P\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k).$$

Si $n = 1$, on a obttient $q_1 = P(B_1) = \boxed{\frac{1}{12}}$.

Si $n = 2$,

$$q_2 = P(B_1) + P(B_2) = \frac{3}{48}\left(\frac{5}{6}\right)^{2-2} + \frac{11}{72}\left(\frac{5}{6}\right)^{2-2} = \frac{3 \times 3 + 11 \times 2}{24 \times 2 \times 3} = \boxed{\frac{31}{144}}.$$

Enfin si $n \geqslant 3$, on obtient par additivité des sommes (relation de Chasles) :

$$\begin{aligned} q_n &= \frac{3}{48}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{11}{96}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-3} + \frac{11}{72}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} \\ &= \frac{3}{48}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} + (n-2)\frac{11}{96}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-3} + \frac{11}{72}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} \\ &= \frac{1}{24}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}\left(\frac{3}{2} + (n-2)\frac{11}{4}\left(\frac{5}{6}\right)^{-1} + \frac{11}{3}\right) \\ &= \frac{1}{24}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}\left(\frac{31}{6} + (n-2)\frac{33}{10}\right) \\ &= \boxed{\frac{1}{720}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}\left(99n - 43\right)}. \end{aligned}$$

Exercice 2 (d'après ECRICOME 2000)

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à 3. On désigne par f la fonction qui à tout polynôme P de E associe le polynôme $f(P)$ défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(P)(x) = P(x+1) + P(x).$$

3. Montrer que f est une application de E vers E.

Solution. Il s'agit de montrer que, pour tout $P \in E$, le polynôme $f(P)$ est bien défini que son degré est inférieur ou égal à 3. Ces conditions sont bien vérifiées car $f(P)$ est de la forme :

$$\left(a_0 + a_1(X+1) + a_2(X+1)^2 + a_3(X+1)^3\right) + \left(a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3\right)$$

qui est une somme de polynômes de degrés inférieurs ou égaux à 3.

4. Soient $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$ et $Q = b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3$ deux éléments de E.

a) Montrer que $f(P) = Q$ si et seulement si (a_0, a_1, a_2, a_3) est solution du système $(\mathcal{S})$ suivant :

$$\begin{cases} 2a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = b_0 \\ 2a_1 + 2a_2 + 3a_3 = b_1 \\ 2a_2 + 3a_3 = b_2 \\ 2a_3 = b_3 \end{cases}$$

Solution. On développe $f(P)$ à l'aide des identités remarquables :

$$\begin{aligned} f(P) &= \left(a_0 + a_1(X+1) + a_2(X+1)^2 + a_3(X+1)^3\right) + \left(a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3\right) \\ &= 2a_0 + a_1(2X+1) + a_2(2X^2+2X+1) + a_3(2X^3+3X^2+3X+1) \\ &= (2a_0 + a_1 + a_2 + a_3) + (2a_1 + 2a_2 + 3a_3)X + (2a_2 + 3a_3)X^2 + 2a_2X^3 \end{aligned}$$

Par identification des coefficients de ces polynômes, on en déduit directement que $f(P) = Q$ si et seulement si (a_0, a_1, a_2, a_3) est solution de $(\mathcal{S})$.

b) En déduire que f est une bijection.

Solution. Il s'agit de montrer que, quel que soit $Q \in E$, l'équation $f(P) = Q$ admet une unique solution $P \in E$, c'est-à-dire que $(\mathcal{S})$ est de Cramer d'après la question précédente. Ceci est bien vérifié car ce système est échelonné, compatible, avec 4 pivots pour 4 inconnues.

c) Résoudre le système $(\mathcal{S})$ lorsque $(b_0, b_1, b_2, b_3) = (0, 0, 0, 1)$. Que vaut $f^{-1}(X^3)$?

Solution. Le système étant échelonnée et de Cramer, la méthode du pivot de Gauss permet d'exprimer l'unique solution. En travaillant sous forme matricielle :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 2L_1 - L_4 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_4 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - 3L_4 \end{array}$$

$$\iff \left(\begin{array}{cccc|c} 8 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 2L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array}$$

$$\iff \left(\begin{array}{cccc|c} 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

L'unique solution de ce système est donc donnée par :

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{8},\ a_1 = 0,\ a_2 = -\frac{3}{4},\ a_3 = \frac{1}{2}}.$$

Puisque $(b_0, b_1, b_2, b_3) = (0, 0, 0, 1)$ correspond au polynôme $Q = X^3$, on en déduit que son unique antécédent par f est le polynôme :

$$\boxed{P = \frac{1}{8} - \frac{3}{4}X^2 + \frac{1}{2}X^3}.$$

5. Soient $Q = X^3$ et $P \in E$ tel que $f(P) = Q$. On considère pour tout entier naturel strictement positif n la somme

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k Q(k).$$

a) Exprimer simplement $S(n)$ en fonction de $(-1)^n$, $P(n+1)$ et $P(1)$.

Solution. Puisque $Q = f(P)$, on sait que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $Q(k) = P(k+1) + P(k)$. Ainsi :

$$\begin{aligned} S(n) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k [P(k+1) + P(k)] \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k P(k+1) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k P(k) && \text{(linéarité)} \\ &= \sum_{j=2}^{n+1} (-1)^{j-1} P(j) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k P(k) && \text{(changement d'indice } j = k+1) \\ &= -\sum_{j=2}^{n+1} (-1)^j P(j) + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j P(j) && \text{(changement d'indice muet } j = k) \\ &= -(-1)^{n+1} P(n+1) + (-1)^1 P(1) && \text{(annulation des termes pour } j \in [\![2, n]\!]) \end{aligned}$$

et donc finalement : $\boxed{S(n) = (-1)^n P(n+1) - P(1)}$.

Remarque. Une solution plus rapide est possible en exprimant directement $S(n)$ comme une somme télescopique :

$$\begin{aligned} S(n) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \left[P(k+1) + P(k)\right] \\ &= \sum_{k=1}^{n} \Big[(-1)^k P(k) - (-1)^{k+1} P(k+1)\Big] \end{aligned}$$

b) Expliciter alors la valeur de $S(n)$ en fonction de n.

Solution. En utilisant l'expression de P calculée précédemment, on obtient :

$$\begin{aligned} S(n) &= (-1)^n \left(\frac{1}{8} - \frac{3(n+1)^2}{4} + \frac{(n+1)^3}{2}\right) + \frac{1}{8} \\ &= \boxed{(-1)^n \frac{4n^3 + 6n^2 - 1}{8} + \frac{1}{8}}. \end{aligned}$$

Exercice 3 (d'après ECRICOME 2013)

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(x) = \frac{x\ln(x) - 1}{x},$$

ainsi que la fonction numérique f des variables réelles x et y définies par :

$$\forall (x,y) \in \left]0,+\infty\right[\times \left]0,+\infty\right[, \quad f(x,y) = \frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} + \frac{y^2}{2} + \exp\left(-\frac{1}{x}\right)$$

où exp désigne la fonction exponentielle.

I. Étude des zéros de φ

6. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives.
Interpréter graphiquement cette limite.

Solution. On sait que $x\ln(x) \underset{0}{\rightarrow} 0$ par croissances comparées, donc $x\ln(x) - 1 \underset{0}{\rightarrow} -1$ par différence. Pour $x \rightarrow 0^+$, on obtient donc par quotient :

$$\boxed{\varphi(x) = \frac{x\ln(x) - 1}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty}.$$

Graphiquement, $\boxed{\text{la courbe de } f \text{ a donc une asymptote verticale pour } x \rightarrow 0}$.

7. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, ainsi que la limite de $\dfrac{\varphi(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.

Solution. Par différence, $\boxed{\varphi(x) = \ln(x) - \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty}$, car $\ln(x) \underset{+\infty}{\rightarrow} +\infty$ et $\dfrac{1}{x} \underset{+\infty}{\rightarrow} 0$.

En revanche, $\dfrac{\ln(x)}{x} \underset{+\infty}{\rightarrow} 0$ par croissances comparées et $\dfrac{1}{x^2} \underset{+\infty}{\rightarrow} 0$, donc :

$$\boxed{\frac{\varphi(x)}{x} = \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x^2} \longrightarrow 0}.$$

Ainsi, $\boxed{\text{la courbe de } f \text{ présente une branche parabolique d'axe } (Ox) \text{ en } +\infty}$.

Remarque. On dispose plus précisément de l'équivalent $\varphi(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x)$.

8. Justifier la dérivabilité de φ sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer sa dérivée.

Solution. La fonction $\varphi : x \mapsto \ln(x) - \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par différence de fonctions usuelles dérivables sur cet intervalle et :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{x+1}{x^2}}.$$

9. Dresser le tableau de variation de φ en faisant apparaître les limites de φ en 0^+ et $+\infty$.

Solution. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $x+1>0$ et $x^2>0$, donc $\varphi'(x)>0$. On obtient donc sur cet intervalle :

x	0	$+\infty$
signe de $\varphi'(x)$	$+$	
variations de φ	$-\infty$	$+\infty$

10. Prouver l'existence d'un unique réel $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\varphi(\alpha)=0.$$

Justifier que $\alpha \in [1,e]$.

Solution. Sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$, la fonction φ est :

- continue (même dérivable),
- strictement croissante.

Donc φ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur l'intervalle $\left]\lim\limits_{0^+}\varphi;\lim\limits_{+\infty}\varphi\right[= \left]-\infty;+\infty\right[$.
Or $0 \in]-\infty;+\infty[$ donc l'équation $\varphi(x)=0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$, que l'on notera α.
Par calcul $\varphi(1)=-1<0$ et $\varphi(e)=1-\dfrac{1}{e}>0$. Ainsi $\varphi(1)<\varphi(\alpha)<\varphi(e)$ et donc $1<\alpha<e$ par stricte croissance de φ. En particulier $\alpha \in [1;e]$.

Remarque. On peut aussi rédiger ce dernier argument en utilisant la réciproque φ^{-1}, qui est strictement monotone et de même sens que φ, ici croissante. Ainsi :

$$\varphi(1)<\varphi(\alpha)<\varphi(e) \implies \underbrace{\varphi^{-1}(\varphi(1))}_{1} < \underbrace{\varphi^{-1}(\varphi(\alpha))}_{\alpha} < \underbrace{\varphi^{-1}(\varphi(e))}_{e}.$$

II. Étude d'une suite réelle

On considère la suite u définie par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} u_0 = e\,; \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \varphi(u_n)+u_n. \end{cases}$$

11. Démontrer que pour tout n entier naturel, u_n existe et $u_n > \alpha$.

Solution. Procédons par récurrence en associant à tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition

$$\mathcal{P}_n : \boxed{u_n \text{ existe et } u_n > \alpha}.$$

- $\mathcal{P}_0$ est vraie car $u_0 = e$ est bien défini et $e > \alpha$ d'après la question précédente.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$ et montrons $\mathcal{P}_{n+1}$. Par hypothèse u_n existe et $u_n > \alpha$. En particulier $u_n > 0$ donc $u_{n+1} = \varphi(u_n)+u_n$ est bien défini et, puisque φ croît strictement, $u_{n+1} > \varphi(\alpha)+u_n > 0+\alpha$.
- Par récurrence, on en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}_n$.

12. Si cette suite est convergente de limite L, que peut valoir L ?

Solution. Supposons que u converge vers un réel L. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > \alpha$, on obtient $L \geqslant \alpha$ par passage à la limite. En particulier $L > 0$ et donc

$$u_{n+1} = \varphi(u_n) + u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi(L) + L$$

par continuité de φ sur $\mathbb{R}_+^*$. Or $u_{n+1} \longrightarrow L$ donc on obtient par unicité des limites : $\varphi(L) + L = L$, c'est-à-dire $\varphi(L) = 0$. Puisque α est l'unique solution de l'équation $\varphi(x) = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que $\boxed{L = \alpha}$.

13. Prouver que la suite est strictement croissante.

Solution. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a vu que $u_n > \alpha$ et donc, puisque φ croît strictement, $u_{n+1} - u_n = \varphi(u_n) > \varphi(\alpha)$. Or $\varphi(\alpha) = 0$, donc ceci entraîne : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} > u_n}$.
Cette suite est donc strictement croissante.

14. La suite u est-elle convergente ?

Solution. Montrons que u n'est pas convergente. On suppose qu'elle converge vers un certain réel L et on cherche une contradiction. D'après les questions précédentes, on sait que nécessairement $L = \alpha$ et que la suite croît strictement. En particulier : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_0 < u_n$. On en déduit que $u_0 \leqslant \alpha$ par passage à la limite, alors que $u_0 > \alpha$. Ceci est absurde.

Remarque. D'après le théorème des suites monotones, on pourrait en fait déduire de tout ceci que la suite diverge vers $+\infty$. C'est ce qui justifie l'algorithme de la question suivante.

15. Soit A un réel. Recopier et compléter le programme suivant afin qu'il affiche le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant A$:

```
function y = g(x)
  ...
endfunction

A = input("Entrer un réel A > 0 : ")
u = exp(1)
n = 0

while ...
  u = ...
  n = ...
end

disp(...)
```

Solution.

```
function y = g(x)
  y = (x*log(x)-1)/x + x
endfunction

A = input("Entrer un réel A > 0 : ")
u = exp(1)
n = 0
```

```
while u < A
  u = g(u)
  n = n + 1
end

disp(n)
```

III. Étude de f

On appelle *point critique* de f tout couple $(x,y) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ tel que $\partial_1 f(x,y) = 0$ et $\partial_2 f(x,y) = 0$.

16. Calculer les dérivée partielles de f.

Solution. Il y avait une coquille dans l'énoncé qu'on a ici corrigée. Par dérivation de sommes et composition :

$$\boxed{\partial_1 f(x,y) = -\frac{2}{x^3} + \frac{y}{x^2} + \exp\left(-\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x^2}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\partial_2 f(x,y) = -\frac{1}{x} + y}.$$

17. Prouver que f possède un unique point critique noté A d'abscisse $x = \alpha$ et d'ordonnée $y = y_\alpha$ à déterminer en fonction de α.

Solution. Pour tout $(x,y) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[$,

$$\begin{aligned}
(x,y) \text{ est critique} &\iff \begin{cases} \partial_1 f(x,y) = 0 \\ \partial_2 f(x,y) = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -2 + xy + xe^{-1/x} = 0 \\ -1/x + y = 0 \end{cases} && (\text{car } x \neq 0) \\
&\iff \begin{cases} -1 + xe^{-1/x} = 0 \\ y = 1/x \end{cases} && (\text{par substitution de } y)
\end{aligned}$$

Étudions la première équation :

$$-1 + xe^{-1/x} = 0 \iff x = e^{1/x} \iff \ln(x) = \frac{1}{x} \iff \underbrace{\ln(x) - \frac{1}{x}}_{\varphi(x)} = 0.$$

Or α est l'unique solution de $\varphi(x) = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc finalement (x,y) est critique si et seulement si $x = \alpha$ et $y = 1/\alpha$, c'est-à-dire que

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ admet pour unique point critique } A = (\alpha, y_\alpha) \text{ avec } y_\alpha = \frac{1}{\alpha}}.$$