Correction du Devoir sur Table n° 3

Samedi 01 Décembre 2018

Exercice 1

1. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2e^n - ne^{2n}}{n^3\ln n - n(\ln n)^3}$

Démonstration. (a) Soit $n \geqslant 1$. Notons $v_n = \dfrac{n^2e^n - ne^{2n}}{n^3\ln n - n(\ln n)^3}$. Pour calculer la limite de ce quotient, on identifie le terme prépondérant (*i.e.* celui qui admet la plus forte croissance) au numérateur et au dénominateur. On factorise alors v_n à l'aide de ces éléments. Plus précisément, on a :

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{-n\mathrm{e}^{2n}}{n^3\ln n} \times \frac{-\dfrac{n^2\mathrm{e}^n}{n\mathrm{e}^{2n}}+1}{1-\dfrac{n(\ln n)^3}{n^3\ln n}} \\ &= \frac{-\mathrm{e}^{2n}}{n^2\ln n} \times \frac{1-\dfrac{n}{\mathrm{e}^n}}{1-\dfrac{(\ln n)^2}{n^2}} \end{aligned}$$

Or, une croissance exponentielle est beaucoup plus forte qu'une croissance polynomiale. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\mathrm{e}^n} = 0$. Une croissance logarithmique est beaucoup plus faible qu'une croissance polynomiale. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(\ln n)^2}{n^2} = 0$. Enfin, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{2n}}{n^2\ln(n)} = +\infty$ car une croissance exponentielle est beaucoup plus forte qu'une croissance polynomiale. On en conclut (par somme, quotient, produit) que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty.}$$

(b) Reprenons nos calculs pour trouver un équivalent de la suite (v_n). D'après les calculs ci-dessus, il est clair que l'on a réussi à écrire (v_n) sous la forme :

$$v_n = w_n \times I_n, \quad \text{avec} \quad \lim_{n\to+\infty} I_n = 1.$$

Ceci fournit alors immédiatement un équivalent de la suite (v_n) :

$$\boxed{\mathrm{v}_n \sim \frac{-\mathrm{e}^{2n}}{n^2\ln n} \quad \text{quand} \quad n\to+\infty.}$$

□

2. Calculer $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+n}\right)$

Démonstration. (a) Soit $n \geqslant 1$.Notons $u_n = \sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+n}$. On pense ici à utiliser la quantité conjuguée. On a :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+n}\right)\left(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+n}\right)}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+n}} \\ &= \frac{n^2+2n-(n^2+n)}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+n}} \\ &= \frac{n}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+n}} \\ &= \frac{n}{n}\times\frac{1}{\sqrt{\frac{n^2+2n}{n^2}}+\sqrt{\frac{n^2+n}{n^2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \end{aligned}$$

Or $\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{2}{n} = 1$ et la fonction racine est continue en 1. Donc $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{1+\frac{2}{n}} = \sqrt{1} = 1$. De même, $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}} = 1$. On en conclut (par quotient et somme de suites convergentes) que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}.}$$

(b) Comme $\frac{1}{2}\neq 0$, on déduit que la suite (u_n) vérifie :

$$\boxed{\mathrm{u}_n \sim \tfrac{1}{2} \quad \text{quand} \quad n\to+\infty.}$$

□

3. (a) On reconnaît ici une somme géométrique, au facteur 2 près ; de raison $q=\frac{1}{3}\neq 1$. En effet,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}\frac{2}{3^k} &= 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k \\ &= 2\times\frac{1}{3}\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} \\ &= \frac{2}{3}\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}} \\ &= 1-\left(\frac{1}{3}\right)^n. \end{aligned}$$

On a donc :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{3^k} = 1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

(b) Par ailleurs, la suite $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ est géométrique de raison $q=\frac{1}{3}$ i.e $|q|<1$, donc d'après le cours :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0.$$

D'où finalement par somme et produit, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = 1.}$$

4. (a) On rappelle tout d'abord que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^{x\ln 3}$.
   - Montrons que f est injective :
   Soient x et y réels tels que $f(x) = f(y)$. Montrons que $x = y$.
   Par hypothèse $f(x) = f(y)$, donc $e^{x\ln 3} = e^{y\ln 3}$, puis par composition avec la fonction ln, on en déduit que $x\ln 3 = y\ln 3$ et donc que $x = y$.
   - Montrons que f n'est pas surjective :
   Soit $y = -2$. Comme une exponentielle est toujours positive, il n'existe pas de réel $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = -2$

   $$\boxed{\bullet \text{ Il est alors clair que } f \text{ n'est pas bijective car non surjective}}$$

   .

   (b) OK

5. On considère l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array}$.
   - Montrons que f est injective :
   Soient n et m deux entiers naturels tels que $f(n) = f(m)$. Montrons que $n = m$.
   Par hypothèse $f(n) = f(m)$, donc $n + 1 = m + 1$, on en déduit alors immédiatement que $n = m$.
   - Montrons que f n'est pas surjective :
   Soit $y = 0 \in \mathbb{N}$. Pour un tel y, il n'existe pas de réel $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(n) = 0$. Car si tel était le cas, alors il existerait un entier naturel n tel que $n + 1 = 0$ i.e $n = -1$. Or -1 n'est pas un entier naturel !

   $$\boxed{\bullet \text{ Il est alors clair que } f \text{ n'est pas bijective car non surjective}}$$

   .

6. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $v_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \dfrac{1+3v_n}{4}$.
   Donner une formule explicite de v_n.

   Démonstration.
   La suite (v_n) est arithmético-géométrique.
   - L'équation de point fixe associée à la suite (v_n) est : $x = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{4}$.
   Elle admet pour unique solution : $\lambda = 1$.
   - On écrit :

   $$\begin{array}{rclcccl} v_{n+1} & = & \frac{3}{4} & \times & v_n & + & \frac{1}{4} \quad (L_1) \\ \lambda & = & \frac{3}{4} & \times & \lambda & + & \frac{1}{4} \quad (L_2) \end{array}$$

   et donc $$v_{n+1} - \lambda = \frac{3}{4} \times (v_n - \lambda) \quad (L_1)-(L_2)$$

   Notons alors (w_n) la suite de terme général $w_n = v_n - \lambda$.
   - La suite (w_n) est géométrique de raison $\dfrac{3}{4}$.
   Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n \times w_0 = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n \times (v_0 - \lambda) = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n \times (-1-1) = -2\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

   $$\boxed{\text{On a donc, pour tout } n \in \mathbb{N} :\ v_n = w_n + \lambda = -2\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1.}$$

   □

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n(1-u_n)$.

1. Que dire de la suite (u_n) si $u_0 = 0$? Et si $u_0 = 1$?

   Démonstration. Si $u_0 = 0$, on démontre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$ désigne la propriété : $u_n = 0$.
   Initialisation : $u_0 = 0$ donc $\mathcal{P}(0)$.
   Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ *i.e.* $u_n = 0$. Par définition de la suite (u_n), on a $u_{n+1} = u_n(1-u_n) = 0(1-0) = 0$. Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.
   Par principe de récurrence, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0$.

   Si $u_0 = 1$, on montre de manière analogue que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 0$.

   $$\boxed{\text{Si } u_0 = 0 \text{ ou } u_0 = 1 \text{ on a : } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 0}$$

   □

2. Dans cette question on suppose que $0 < u_0 < 1$.
   Pour la suite de cet exercice, on note $f : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x(1-x) \end{array} \right.$. f est une fonction polynomiale donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1-2x$. On en déduit donc le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$			0			$-$	
Variations de f	$-\infty$	↗	0	↗	$\frac{1}{4}$	↘	0	↘	$-\infty$

   La fonction f admet donc pour maximum $\frac{1}{4}$ au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

   Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition, on a : $u_{n+1} = f(u_n)$. Or, d'après le tableau de variations de la fonction f, on a :

   $$\forall x \in [0,1], \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{4} \tag{1}$$

   On montre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$ désigne la propriété : $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
   Initialisation : $0 < u_0 < 1$ donc $\mathcal{P}(0)$.
   Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$. Par hypothèse de récurrence on a : $0 \leqslant u_n \leqslant 1$. Par la remarque (1) on obtient que : $0 \leqslant f(u_n) \leqslant \frac{1}{4}$. Et donc $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{4} \leqslant 1$. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$. □

   $$\boxed{\text{Par principe de récurrence, on a : } \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant u_n \leqslant 1}$$

   (b) Étudier la monotonie de (u_n) et en déduire qu'elle est convergente.

   Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $u_{n+1} = u_n - u_n^2$ donc $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leqslant 0$. Ainsi, (u_n) est décroissante. D'après la question précédente, cette suite est minorée par 0. Le théorème de convergence monotone nous permet de conclure que (u_n) est convergente.

$$\boxed{(u_n) \text{ est décroissante et converge vers une limite notée } \ell}$$

□

(c) Déterminer sa limite.

Démonstration. Par définition de la suite (u_n), on a que : $u_{n+1} = f(u_n)$. La suite (u_{n+1}) est convergente car suite extraite de (u_n). Ainsi, par passage à la limite, et comme f est continue, on a que : $\ell = f(\ell)$. Autrement dit : $\ell = \ell(1-\ell)$. Ainsi, on a : $-\ell^2 = 0$ et donc $\ell = 0$.

$$\boxed{(u_n) \text{ converge vers } 0}$$

□

3. Dans cette question, on suppose que $u_0 < 0$.

(a) Montrer que (u_n) est décroissante. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_0$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition, $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leqslant 0$. La suite (u_n) est donc décroissante (même démonstration qu'en question *2.b*). On en déduit que tous les termes de la suite sont inférieurs au terme initial u_0.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant u_0}$$

□

(b) La suite est-elle minorée ? (On pourra raisonner par l'absurde).

Démonstration. Par l'absurde, supposons que la suite (u_n) est minorée. D'après la question précédente, elle est décroissante. Elle est donc convergente vers un réel ℓ. Cette limite ℓ vérifie : $\ell = f(\ell)$ et donc $\ell = 0$ (cf question *2.c.*). Or on sait que : $u_n \leqslant u_0$. On a donc $\ell \leqslant u_0$. Et comme $u_0 < 0$, on obtient $\ell < 0$, ce qui contredit $\ell = 0$. La suite est donc non minorée. □

$$\boxed{(u_n) \text{ est non minorée}}$$

(c) En déduire la limite de (u_n).

Démonstration. (u_n) est décroissante et non minorée donc, d'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) tend vers $-\infty$.

$$\boxed{u_n \to -\infty}$$

□

Exercice 3

1. (a) Soit $n \geqslant 1$. La fonction f_n est polynomiale donc **continue**, dérivable sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur $\mathbb{R}_+$. On a alors : $\forall x \geqslant 0, f_n'(x) = nx^{n-1} + 9x = x(nx^{n-1} + 9) > 0$.
La fonction f_n est donc **strictement croissante sur** $\mathbb{R}_+$.
Par ailleurs $f_n(0) = -4$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$; Donc d'après le théorème de la bijection, f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[-4; +\infty[$.
Comme $0 \in [-4, +\infty[$, l'équation $f_n(x) = 0$ a donc une unique solution dans $\mathbb{R}_+$.
Remarquons que cette solution ne peut pas etre nulle, car 0 n'est évidemment pas solution de $f_n(x) = 0$ puisque $f_n(0) = -4 \neq 0$.
On a donc
$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ u_n > 0 \text{ et } f_n(u_n) = 0.}$$
(b) Pour calculer u_1, il faut utiliser le fait que $f_1(u_1) = 0$. Cela revient donc à résoudre l'équation $f_1(x) = 0$, d'inconnue x. Or : $x :\to f_1(x) = x + 9x^2 - 4$ est une fonction polynômiale du second dégré et de discriminant $\Delta = 1 + 4.4.9 = 145$.
On en déduit donc que
$$\boxed{u_1 = \tfrac{-1+\sqrt{145}}{18}}$$
,qui est la racine **positive** de cette équation.
L'autre solution doit etre exclue puisque l'on rappelle que u_1 est strictement positive d'après la question 1.a.
(c) On a $f_n(2/3) = (2/3)^n + 9(2/3)^2 - 4 = (2/3)^n > 0$ et $f_n(0) = -4$
Donc $f_n(0) < f_n(u_n) < f_n(2/3)$ et comme f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et que f_n est bijective, sa bijection réciproque f_n^{-1} est elle-aussi strictement croissante, d'où par composition avec f_n^{-1}, on a : $0 < u_n < \frac{2}{3}$.
et donc
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < u_n < \tfrac{2}{3}.}$$

2. (a) Soit $x \in]0,1[$, on a (après simplifications) : $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1} - x^n = x^n(x-1)$ et comme $x < 1$ et $x^n > 0$ on a bien $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.
(b) Comme $\forall n \geqslant 1, 0 < u_n < \dfrac{2}{3}$, on a en particulier que la suite (u_n) vérifie $\forall n \geqslant 1, 0 < u_n < 1$ et donc en appliquant l'inégalité de la question précédente à u_{n+1}, on a :
$$f_{n+1}(u_{n+1}) = 0 < f_n(u_{n+1}).$$
Donc $f_n(u_{n+1}) > 0$. Par ailleurs, on sait que $f_n(u_n) = 0$ donc on obtient : $f_n(u_{n+1}) > f_n(u_n)$.
Enfin, on a déjà vu que la fonction f_n était bijective (et strictement croissante) donc sa bijection réciproque f_n^{-1} l'est également. Donc par composition avec f_n^{-1} dans l'inégalité établie juste ci-dessus, on a alors
$$\boxed{u_{n+1} > u_n.}$$
Ceci prouve donc que la suite (u_n) est strictement croissante.
(c) La suite (u_n) est croissante et majorée par $\frac{2}{3}$ (d'après la question 1.c donc d'après **le théorème de convergence monotone**,
$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est convergente vers un réel } \ell.}$$
De l'encadrement de la suite (u_n), établi à la question 1.c, on en déduit par passage à la limite dans les inégalités (ce qui est autorisé puisque la suite converge !) que

$$\boxed{0 \leq \ell \leq \tfrac{2}{3}.}$$

En effet , par passage à la limite, les inégalités s'élargissent (les inégalités strictes deviennent automatiquement larges !).

3. (a) Comme $0 \leq u_n \leq 2/3$ et que la fonction puissance n est strictement croissante pour $n > 0$ sur $\mathbb{R}^+$ (sur $\mathbb{R}^-$ celà dépendrait de la parité de n) alors $0^n \leq (u_n)^n \leq (2/3)^n$ et comme $|2/3| < 1$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} (2/3)^n = 0$ donc par **théorème d' encadrement**, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n^n = 0.}$$

Remarque : on pouvait aussi passer par l'écriture exp-log de u_n^n, ce qui donnait par composition des limites, le même résultat !

(b) ON sait que $\forall n \geqslant 1, f_n(u_n) = 0$, ce qui se traduit par ${u_n}^n + 9\,{u_n}^2 - 4 = 0$. On en déduit alors alors par passage à la limite dans l'égalité que $9\ell^2 - 4 = 0$ et donc que

$$\ell = \frac{2}{3} \textbf{ OU } \ell = -\tfrac{2}{3}.$$

Or on sait aussi que $\ell > 0$ d'après la question 2.c ce qui donne finalement le résultat

$$\boxed{\ell = \tfrac{2}{3}.}$$

Problème

Partie 1

1. (a) En étudiant les variations de la fonction $f : x \mapsto \ln(x+1) - \ln x - \dfrac{1}{x}$, prouver que $\ln(n+1) - \ln n \leqslant \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On admettra dans la suite de l'exercice qu'on a $\dfrac{1}{n} \leqslant \ln n - \ln(n-1)$ pour $n \geqslant 2$.

Démonstration. $\mathcal{D}_f =]0, +\infty[$: en effet, la fonction ln est définie sur $]0, +\infty[$ et les fonctions $x \mapsto \ln(x+1)$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ sont définies sur cet ensemble. De plus, f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ car chacune de ces trois fonctions est dérivable sur $\mathcal{D}_f$. Pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - x(x+1) + (x+1)}{x^2(x+1)} = \frac{1}{x^2(x+1)}$$

On a donc $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$. Il reste alors à déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$. Pour $x \in]0, +\infty[$, on note $X = \frac{1}{x}$. On a :

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x} = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} = \ln(1+X) - X = X\left(\frac{\ln(1+X)}{X} - 1\right)$$

Quand $x \to 0^+$, on a $X \to +\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\ln(1+X)}{X} = 0$ et donc $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\ln(1+X)}{X} - 1 = -1$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} X\left(\dfrac{\ln(1+X)}{X}\right) = -\infty$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.

D'autre part, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = 0$. On en déduit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

On a donc le tableau de variations suivant.

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $f'(x)$	$\|\|$ $\qquad$ $+$
Variations de f	$\|\|$ $-\infty \nearrow 0$

Et ainsi, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) \leqslant 0$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) \leqslant 0$, ce qui s'écrit :

$$\ln(n+1) - \ln n \leqslant \frac{1}{n}$$

□

(b) OK

(c) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a $\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln n$.

Démonstration. D'après la question précédente, on a, pour tout $k \geqslant 1$: $\ln(k+1) - \ln k \leqslant \dfrac{1}{k}$. Ainsi, en sommant chaque membre de ces inégalité, on obtient :

$$\begin{array}{rrcl} & \sum\limits_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln k) & \leqslant & \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ & \ln(n+1) - \ln 1 & \leqslant & \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ \text{et donc} & \ln(n+1) & \leqslant & \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \end{array}$$

On raisonne de même pour l'inégalité de droite. D'après la question précédente, on a, pour tout $k \geqslant 2$: $\dfrac{1}{k} \leqslant \ln k - \ln(k-1)$. Ainsi, en sommant chaque membre de cette inégalité, on obtient :

$$\begin{array}{rrcl} & \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k} & \leqslant & \sum\limits_{k=2}^{n} (\ln k - \ln(k-1)) \\ \text{donc par téléscopage} & \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k} & \leqslant & (\ln n - \ln 1) \\ \text{donc} & \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k} & \leqslant & \ln n \\ \text{et enfin} & \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k} & \leqslant & 1 + \ln n \end{array}$$

□

(d) Quelle est la limite de (H_n) quand n tend vers $+\infty$?

Démonstration. D'après la question précédente, $H_n \geqslant \ln(n+1)$. Or, quand $n \to +\infty$, $\ln(n+1) \to +\infty$. Donc **par théorème de comparaison**, on en déduit que $H_n \to +\infty$. □

(e) Étudier la monotonie des suites (u_n) et (y_n).

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. (x_n) et (y_n) étant définies à l'aide de sommation, on va calculer $x_{n+1} - x_n$ et $y_{n+1} - y_n$. On a :

$$\begin{array}{rcl} x_{n+1} - x_n & = & \left(\sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1)\right) - \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right) \\ & = & \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n \ \leqslant \ 0 \end{array}$$

L'inégalité est obtenue en utilisant la propriété admise à la question 1.a) au rang $n+1$. Notez que cette inégalité est valide au rang $n+1$ car $n+1 \geqslant 2$ (puisque $n \geqslant 1$). On en conclut que (x_n) est décroissante. De même, on a :

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+2)\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)\right) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+2) + \ln(n+1) \ \geqslant\ 0 \end{aligned}$$

L'inégalité est obtenue en utilisant la propriété démontrée à la question 1.a) au rang $n+1$. On en conclut que (x_n) est croissante. □

(f) Montrer que (x_n) et (y_n) sont adjacentes.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a déjà montré que (x_n) décroissante, (y_n) croissante. Il reste donc à montrer que $y_n - x_n n 0$. Or $y_n - x_n = \ln n - \ln(n+1) = -\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = -\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.
Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0$. □

(g) En déduire qu'il existe un réel γ (qu'on ne cherchera pas à calculer) tel que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \varepsilon_n$$

avec $\lim\limits_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0$.

Démonstration. On déduit de la question précédente que (x_n) et (y_n) sont convergentes, de même limite. On note γ cette limite. Comme (x_n) converge vers γ, $(x_n - \gamma)$ converge vers 0, d'après le cours. En notant (ε_n) la suite $(x_n - \gamma)$, on obtient le résultat souhaité. □

(h) *Démonstration.* D'après la question précédente, on a prouvé que

$$H_n = \ln n + \gamma + \varepsilon_n$$

avec $\lim\limits_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0$. En particulier, en divisant ceci par $\ln n$, on obtient

$$\frac{H_n}{\ln n} = 1 + \frac{\gamma}{\ln n} + \frac{\varepsilon_n}{\ln n}$$

Enfin, par passage à la limite dans l'égalité ci-dessus, comme il est clair que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\gamma}{\ln n} = 0$ et que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\varepsilon_n}{\ln n} = 0$, on en déduit :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{H_n}{\ln n} = 1.$$

Ainsi, $H_n \sim \ln n$, au voisinage de $+\infty$.

□

Partie 2

2. On s'intéresse désormais à la suite (z_n) définie pour $n \geqslant 0$ par $z_n = \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

a. Calculer les valeurs de z_0, z_1, z_2 et z_3. On présentera des résultats simplifiés.

Démonstration. D'après la définition de la suite (z_n), on a :

$$z_0 = \sum_{k=1}^{0} \frac{1}{k} = \sum_{k\in\varnothing} \frac{1}{k} = 0$$

$$z_1 = \sum_{k=2}^{2} \frac{1}{k} = \frac{1}{2}$$

$$z_2 = \sum_{k=3}^{4} \frac{1}{k} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

$$z_3 = \sum_{k=4}^{6} \frac{1}{k} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{74}{120} = \frac{37}{60}$$

□

b. Étudier la monotonie de la suite (z_n).

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. La suite (z_n) étant obtenue par sommation, sa monotonie est étudiée via le calcul de $z_{n+1} - z_n$. On a :

$$\begin{aligned}
z_{n+1} - z_n &= \sum_{k=(n+1)+1}^{2(n+1)} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \\
&= \sum_{k=n+2}^{2n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \\
&= \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{(2n+1) - 2(n+1)}{(n+1)(2n+1)} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{(n+1)(2n+1)} \geqslant 0
\end{aligned}$$

Ainsi, (z_n) est croissante. □

c. Démontrer que $z_n \leqslant 1$ lorsque que $n \geqslant 1$. En déduire que (z_n) est convergente.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $k \in \mathbb{N}$ tel que : $n+1 \leqslant k \leqslant 2n$. Alors : $\frac{1}{2n} \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{n+1}$.
L'inégalité de droite nous permet d'affirmer que :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{n+1} = (2n - (n+1) + 1) \times \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \leqslant 1$$

□

(z_n) est croissante est majorée par 1. Elle est donc convergente et sa limite ℓ $(= \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} z_n)$ vérifie $\ell \leqslant 1$.

d. Prouver que $x_{2n} - x_n = z_n - \ln 2$, et en déduire la limite de (z_n).

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la définition de (x_n), on a :

$$\begin{aligned} x_{2n} - x_n &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \ln(2n) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right) \\ &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - \ln 2 - \ln n + \ln n \\ &= z_n - \ln 2 \end{aligned}$$

Ainsi, $z_n = x_{2n} - x_n + \ln 2$. Or on sait que (x_n) converge vers γ. Donc (x_{2n}), suite extraite de (x_n) converge elle aussi vers γ. La limite d'une somme de suites convergentes est la somme des limites de ces suites. Ainsi, (z_n) converge vers $\gamma - \gamma + \ln 2 = \ln 2$. □

Partie 3

3. (a) Par sommation par paquets, on reconnait immédiatement que :

$$\forall n > 0, H_{2n} - H_n = z_n.$$

(b) On a donc pour tout entier naturel $n > 1$, $H_{2n} - H_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$. En particulier :

$$\begin{aligned} & n+1 \leqslant k \leqslant 2n \\ \Rightarrow\ & \frac{1}{2n} \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{n+1} \\ \Rightarrow\ & \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{n+1} \\ \Rightarrow\ & \frac{1}{2n} \sum_{k=n+1}^{2n} 1 \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \\ \Rightarrow\ & \frac{1}{2n} \times (2n - (n+1) + 1) \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \\ \Rightarrow\ & \frac{1}{2n} \times n \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \end{aligned} \tag{2}$$

On obtient finalement : $n > 1$, $H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}$.

(c) Il est clair que la suite (H_n) est croissante car pour tout entier naturel $n > 1$, on a immédiatement :

$$H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} > 0.$$

$$\boxed{\text{Ainsi la suite } (H_n) \text{ est une suite croissante.}}$$

(d) Donc par théorème de convergence monotone, soit la suite (H_n) converge vers un réel ℓ soit elle diverge vers $+\infty$.
Supposons par l'absurde qu'une telle suite converge vers un réel ℓ. Alors comme la suite (H_{2n}) est extraite de la suite (H_n), elle converge aussi vers ℓ (cf rappel de la fin de la partie 2). Ainsi par passage à la limite dans l'inégalité établie à la question 3.b, on a :

$$\ell - \ell \geqslant \frac{1}{2} \quad i.e \quad 0 \geqslant \frac{1}{2}.$$

C'est bien sur impossible ! Ceci prouve donc que la suite

$$\boxed{(H_n) \text{ diverge vers } +\infty.}$$