Devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 2

E1A

le lundi 5 novembre 2018

La calculatrice est interdite. Toutes les réponses devront être soigneusement justifiées et rédigées. Les résultats seront mis clairement en évidence. On respectera l'ordre et la numérotation des questions. On commencera chaque exercice sur une nouvelle page. Les ratures tout comme l'abus de blanc correcteur sont à éviter.

Questions courtes

1. Calculer $\dbinom{11}{3}$.

$$\binom{11}{3} = \frac{11!}{3!\,(11-3)!} = \frac{9 \times 10 \times 11}{3!} = 3 \times 5 \times 11 = 165$$

2. Pour tout n entier naturel, simplifier les sommes suivantes : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2k+3}{4}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{4-3k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{3^{2k}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. La première somme se ramène à des sommes usuelles par linéarité :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{2k+3}{4} &= \frac{2}{4}\sum_{k=0}^{n} k + \frac{3}{4}\sum_{k=0}^{n} 1 \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} + \frac{3}{4} \times (n+1) \\ &\boxed{= \frac{(n+3)(n+1)}{4}}\end{aligned}$$

De même, puisque $2^{4-3k} = \dfrac{2^4}{2^{3k}} = \dfrac{16}{8^k}$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} 2^{4-3k} &= 16 \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{8}\right)^k \\ &= 16 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{8}} \\ &\boxed{= \frac{128}{7}\left(1 - \left(\frac{1}{8}\right)^{n+1}\right)}\end{aligned}$$

La dernière somme correspond à un développement du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{3^{2k}} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(-\frac{1}{9}\right)^k \\ &= \left(1 - \frac{1}{9}\right)^n \\ &\boxed{= \left(\frac{8}{9}\right)^n}\end{aligned}$$

3. Montrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{(2k+4)^3}{(k+1)^5} = \frac{8^{n-1}\,(n+2)^3}{\left((n+1)!\right)^2}$

Attention, il y avait ici une erreur d'énoncé !

Puisque $(2k+4) = 2(k+2)$, on peut réaranger le produit de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n} \frac{(2k+4)^3}{(k+1)^5} &= \frac{\left(\prod_{k=1}^{n} 2\right)^3 \left(\prod_{k=1}^{n}(k+2)\right)^3}{\left(\prod_{k=1}^{n}(k+1)\right)^5} \\
&= \frac{(2^n)^3 \left(\prod_{i=3}^{n+2} i\right)^3}{\left(\prod_{j=2}^{n+1} j\right)^5} && \text{(en posant } i = k+2 \text{ et } j = k+1) \\
&= \frac{2^{3n}\left(\frac{(n+2)!}{2}\right)^3}{(n+1)!^5} \\
&= \frac{2^{3(n-1)}\left(\frac{(n+2)!}{(n+1)!}\right)^3}{(n+1)!^2} \\
&\boxed{= \frac{8^{n-1}(n+2)^3}{(n+1)!^2}} && \text{car } (n+2)! = (n+1)! \times (n+2).
\end{aligned}$$

4. (a) Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto e^{-x}\sqrt{3x}$.

— La fonction f est définie (et continue) sur $\mathbb{R}_+$.

— Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par *produit* de fonctions usuelles dérivables.

— Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors :

$$f'(x) = \sqrt{3}\left(-e^{-x}\sqrt{x} + e^{-x}\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{3}(1-2x)}{2e^x\sqrt{x}}}$$

— On sait que $e^x\sqrt{x} > 0$, donc $f'(x)$ est de même signe que $1-2x$.

— On en déduit que la fonction f est :

$$\boxed{\text{strictement croissante sur } \left[0; \tfrac{1}{2}\right], \text{ et strictement décroissante sur } \left[\tfrac{1}{2}; +\infty\right[.}$$

(b) Écrire une fonction Scilab d'entête « `function y = f(x)` » permettant de calculer une valeur approchée de $f(x)$ pour tout $x \geqslant 0$.

```
function y = f(x)
  y = exp(-x) * sqrt(3*x)
endfunction
```

Exercice 1 (d'après Madigou 2017)

5. Exprimer sous forme explicite la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 4$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = -3a_n + 2$.

Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique.

- Point fixe : on a $x = -3x + 2 \iff 4x = 2 \iff x = \dfrac{1}{2}$.
- Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = a_n - \dfrac{1}{2}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = a_{n+1} - \frac{1}{2} = -3a_n + 2 - \frac{1}{2} = -3a_n + \frac{3}{2} = -3\left(a_n - \frac{1}{2}\right) = -3u_n,$$

  donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison -3 et de premier terme $u_0 = a_0 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{2}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que

$$u_n = \frac{7}{2}(-3)^n, \qquad \text{puis} \qquad a_n = u_n + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{7}{2}(-3)^n + \frac{1}{2}}$$

6. Exprimer sous forme explicite la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $b_0 = 4$, $b_1 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+2} = -3b_{n+1} - 2b_n$.

Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

- Équation caractéristique : $x^2 = -3x - 2 \iff x^2 + 3x + 2 = 0 \iff (x+2)(x+1) = 0$.
  Cette équations admet deux solutions distinctes : -1 et -2.
- D'après le théorème de structure, on sait qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \lambda\,(-1)^n + \mu\,(-2)^n$$

- Détermination des constantes. On sait que $b_0 = 4$ et $b_1 = 1$ donc on obtient le système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} \lambda & + & \mu & = 4 \\ -\lambda & - & 2\mu & = 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcl} \lambda & + & \mu & = 4 \\ & - & \mu & = 5 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcl} \lambda & & & = 9 \\ & - & \mu & = 5 \end{array}\right.$$

  d'où $\lambda = 9$ et $\mu = -5$.

Conclusion : pour tout n entier naturel, $\boxed{b_n = 9(-1)^n - 5(-2)^n}$

7. Soit γ un réel fixé tel que $0 < \gamma < 1$ et soit f la fonction $x \mapsto 2x - x^2$.
On considère la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $c_0 = \gamma$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ c_{n+1} = f(c_n)$.

(a) Étudier les variations de f.

- La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ car elle est polynomiale.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors : $f'(x) = 2 - 2x = 2(1-x)$.
- On en déduit que la fonction f est :

$$\boxed{\text{strictement croissante sur }]-\infty; 1], \text{ strictement décroissante sur } [1; +\infty[.}$$

(b) En déduire que $0 < f(\gamma) < 1$.

On sait que $0 < \gamma < 1$. Or f est *strictement* croissante sur $]-\infty; 1]$, donc :

$$f(0) < f(\gamma) < f(1)$$

Puisque $f(0) = 0 - 0^2 = 0$ et $f(1) = 2 - 1^2 = 1$, on en déduit : $\boxed{0 < \gamma < 1}$

(c) Montrer par récurrence que, pour tout n entier naturel, $0 < c_n < 1$.

- À tout $n \in \mathbb{N}$, on associe la proposition $\mathcal{P}_n$: $\boxed{0 < c_n < 1}$
- *Initialisation.* Pour $n = 0$, on a $c_n = c_0 = \gamma$ par définition, donc $\mathcal{P}_0$ est vraie par hypothèse.
- *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$ et montrons $\mathcal{P}_{n+1}$. D'après $\mathcal{P}_n$, on sait que $0 < c_n < 1$ donc on obtient comme à la question précédente $0 < f(c_n) < 1$ par stricte croissance.
  Or $f(c_n) = c_{n+1}$, donc l'encadrement $\boxed{0 < c_{n+1} < 1}$ est bien vérifié.
- D'après le principe de récurrence, ceci montre que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}_n$.

(d) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \ln(1 - c_n)$.
Montrer que (u_n) est une suite géométrique de raison 2.

Soit $n \in \mathbb{N}$. La relation de récurrence fait apparaître une identité remarquable :

$$\ln(1 - c_{n+1}) = \ln\left(1 - 2c_n + c_n^2\right) = \ln\left((1 - c_n)^2\right) = 2\ln(1 - c_n),$$

car $1 - c_n > 0$. Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 2.

(e) En déduire une forme explicite de u_n, puis de c_n.

Puisque $u_0 = \ln(1 - c_0) = \ln(1 - \gamma)$, on sait que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \ln(1-\gamma)\,2^n}$
Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\ln(1 - c_n) = u_n \iff 1 - c_n = e^{u_n} \iff c_n = 1 - e^{u_n},$$

donc (en reconnaissant une expression de la forme $e^{\alpha \ln(x)} = x^\alpha$) :

$$c_n = 1 - e^{2^n \ln(1-\gamma)} = \boxed{1 - (1-\gamma)^{2^n}}$$

8. Soit $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $d_0 = \dfrac{5}{2}$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ d_{n+1} = \sqrt{5\,d_n - 6}$.

(a) Justifier que $2 < \dfrac{5}{2} < \sqrt{\dfrac{13}{2}} < 3$.

La première inégalité est triviale car $2 = \dfrac{4}{2}$.
De plus tous ces nombres sont *positifs*, donc la *stricte* croissance de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$ donne :

$$\frac{5}{2} < \sqrt{\frac{13}{2}} < 3 \iff \left(\frac{5}{2}\right)^2 < \frac{13}{2} < 3^2 \iff \frac{25}{4} < \frac{26}{4} < \frac{36}{4}$$

Puisque ce dernier encadrement est vrai, on en déduit les inégalités voulues.

(b) Montrer que $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 2 et majorée par 3.

Il s'agit de montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 2 \leqslant d_n \leqslant 3$. Raisonnons par récurrence.

— À tout $n \in \mathbb{N}$, on associe la proposition $\mathcal{P}_n$: $\boxed{2 \leqslant d_n \leqslant 3}$

— Pour $n = 0$, on a $d_n = d_0 = \dfrac{5}{2}$ et $2 \leqslant \dfrac{5}{2} \leqslant 3$ d'après ce qui précède donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$, montrons $\mathcal{P}_{n+1}$.
On sait alors que $2 \leqslant d_n \leqslant 3$, donc par croissance de $x \mapsto \sqrt{x}$:

$$\underbrace{\sqrt{5\times 2 - 6}}_{\sqrt{4}=2} \leqslant \underbrace{\sqrt{5\,d_n - 6}}_{d_{n+1}} \leqslant \underbrace{\sqrt{5\times 3 - 6}}_{\sqrt{9}=3}, \qquad \text{d'où } \mathcal{P}_{n+1}.$$

— D'après le principe de récurrence, ceci montre que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}_n$.

(c) En déduire la monotonie de la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminons le signe de la différence :

$$d_{n+1} - d_n = \sqrt{5\,d_n - 6} - d_n \qquad (\text{avec } 2 \leqslant d_n \leqslant 3)$$

On étudie pour cela la fonction $g : x \mapsto \sqrt{5x-6} - x$. Pour tout $x \in [2;3]$,

$$g(x) = \frac{(\sqrt{5x-6} - x)\,\overbrace{(\sqrt{5x-6} + x)}^{\text{quantité conjuguée}}}{\sqrt{5x-6}+x} = \frac{5x - 6 - x^2}{\sqrt{5x-6}+x} = \frac{(x-2)(3-x)}{\sqrt{5x-6}+x} \geqslant 0$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ d_{n+1} \geqslant d_n$. La suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.

(d) Écrire une fonction Scilab d'entête « `function d = calculeTerme(n)` » telle que, pour tout n entier naturel, `calculeTerme(`n`)` renvoie une valeur approchée de d_n.

```
function d = calculeTerme(n)
  d = 5/2
  for k = 1:n
    d = sqrt(5*d - 6)
  end
endfunction
```

Exercice 2 (d'après Jobin 2015)

Le but de cet exercice est de résoudre l'équation $a^b = b^a$ d'inconnue (a,b) dans $\mathbb{N}^2$.
On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$.

9. Pour tous $(a,b) \in \,]0;+\infty[^2$, montrer que $a^b = b^a$ si et seulement si $f(a) = f(b)$.

Soit $(a,b) \in \,]0;+\infty[$. Par définition des puissances réelles et bijectivité de $x \mapsto e^x$:

$$a^b = b^a \iff e^{b\ln(a)} = e^{a\ln(b)} \iff b\ln(a) = a\ln(b) \iff \frac{\ln(a)}{a} = \frac{\ln(b)}{b}.$$

10. En admettant que $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, dresser le tableau de variation de la fonction f.

— La fonction f est définie sur $D_f =]0;+\infty[$.

— Elle est dérivable sur $]0;+\infty[$ par quotient de fonction dérivables (de dénominateur non nul).

— Soit $x \in]0;+\infty[$. Alors :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln(x)\cdot 1}{x^2} = \boxed{\frac{1-\ln(x)}{x^2}}$$

— On sait que $x^2 > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $1-\ln(x)$. Or $x \mapsto 1-\ln(x)$ décroît strictement et s'annule en $x = e$, donc on en déduit le tableau suivant :

x	0		e		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

11. Pour tout $a \geqslant 3$ fixé, en déduire le nombre de solutions b de l'équation $a^b = b^a$ dans $[3;+\infty[$.

Soit $a \geqslant 3$. Alors $a \in [3;+\infty[$, donc l'équation $f(b) = f(a)$ admet au moins la solution $b = a$ sur cet intervalle. C'est la seule solution car f décroît strictement sur cet intervalle $[3;+\infty[$ (inclus dans $[e;+\infty[$).

12. Résoudre l'équation $1^b = b^1$ d'inconnue b dans $\mathbb{N}$.

Cette équation équivaut à $b = 1$, donc elle admet pour unique solution l'entier 1.

13. Résoudre l'équation $2^b = b^2$ d'inconnue b dans $\mathbb{N}$.

Cette équation admet pour solutions 2 (trivialement) et 4 car : $2^4 = 16$ et $4^2 = 16$. Compte tenu de la stricte monotonie de f sur $]0;e]$ et sur $[e;+\infty[$, il n'y a pas d'autre solution dans $]0;+\infty[$. De plus $1 \neq 0$, donc 0 n'est pas solution.

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'équation } 2^b = b^2 \text{ dans } \mathbb{N} \text{ est donc } \{2,4\}}$$

14. Conclure en déterminant l'ensemble des couples d'entiers $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $a^b = b^a$ et $a < b$.

Faisons la synthèse des questions précédentes :

— On a déjà vu qu'il n'existe aucun couple solution (a,b) avec $a \geqslant 3$ et $b > a$. Les solutions éventuelles sont donc des couples (a,b) avec $a \in \{0,1,2\}$.

— Pour $a = 1$, il n'existe aucun $b \neq 1$ tel que $(1,b)$ soit solution.

— Pour $a = 2$, l'unique couple solution avec $b \neq 2$ est $(2,4)$.

— Pour $a = 0$, l'équation équivaut à $0^b = 1$ qui n'a pas de solution avec $b \neq 0$.

Finalement : $\boxed{\text{l'ensemble des couples vérifiant ces conditions est donc réduit au singleton } \{(2,4)\}}$

Exercice 3

Pour tout entier naturel n, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} k\, x^k.$$

L'objectif de l'exercice est d'établir une expression simplifiée de $f_n(x)$. On considère pour cela la fonction auxiliaire g_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k.$$

15. *Quelques cas particuliers.*

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $f_n(0)$ et $f_n(1)$.

$$f_n(0) = \sum_{k=1}^{n} k\,0^k = \sum_{k=1}^{n} 0 = \boxed{0} \qquad \text{et} \qquad f_n(1) = \sum_{k=1}^{n} k\,1^k = \sum_{k=1}^{n} k = \boxed{\frac{n(n+1)}{2}}$$

(b) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(2) = (n-1)\,2^{n+1} + 2$.

— À tout $n \in \mathbb{N}$, on associe la proposition $\mathcal{P}_n$: $\boxed{f_n(2) = (n-1)2^{n+1} + 2}$

— Pour $n = 0$, on a une somme vide :

$$f_0(2) = \sum_{k=1}^{0} k\,2^k = 0, \qquad \text{et} \qquad (0-1)2^{0+1} + 2 = -2 + 2 = 0 \qquad \text{d'où } \mathcal{P}_0.$$

— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$ et montrons $\mathcal{P}_{n+1}$ (objectif : $f_{n+1}(2) = n2^{n+2} + 2$).

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(2) &= \sum_{k=1}^{n+1} k\,2^k \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\,2^k + (n+1)\,2^{n+1} && \text{(additivité)} \\
&= (n-1)2^{n+1} + 2 + (n+1)\,2^{n+1} && \text{(hypothèse } \mathcal{P}_n) \\
&= 2n \cdot 2^{n+1} + 2 \\
&= n\,2^{n+2} + 2 && \text{d'où } \mathcal{P}_{n+1}.
\end{aligned}$$

— D'après le principe de récurrence, ceci montre que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}_n$.

16. *Lien entre f_n et g_n'.*

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ g_{n+1}'(x) = g_n'(x) + (n+1)\,x^n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Par additivité,

$$g_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k + x^{n+1} = g_n(x) + x^{n+1}.$$

Par dérivation d'une somme de fonctions dérivables, on obtient donc :

$$g_{n+1}'(x) = g_n'(x) + (n+1)\,x^{n+1-1} = \boxed{g_n'(x) + (n+1)\,x^n}$$

(b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad g_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} k\,x^{k-1}.$$

Raisonnons par récurrence :

— À tout $n \in \mathbb{N}$, on associe la proposition $\mathcal{P}_n$: $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ g_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} k\,x^{k-1}}$

— Pour $n = 0$, la fonction $g_0 : x \mapsto x^0$ est constante donc sa dérvée g_0' est partout nulle.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=1}^{0} k\,x^{k-1} = 0$ (somme vide), donc $\mathcal{P}_0$ est vérifiée.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$ et montrons $\mathcal{P}_{n+1}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors :

$$\begin{aligned} g_{n+1}'(x) &= g_n'(x) + (n+1)\,x^n && \text{(question précédente)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} k\,x^{k-1} + (n+1)\,x^n && \text{(hypothèse } \mathcal{P}_n) \\ &\boxed{= \sum_{k=1}^{n+1} k\,x^{k-1}} \quad \text{d'où } \mathcal{P}_{n+1} && \text{(additivité)} \end{aligned}$$

— D'après le principe de récurrence, ceci montre que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}_n$.

(c) Justifier que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = x\,g_n'(x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors d'après la question précédente et par linéarité :

$$x\,g_n'(x) = x\sum_{k=1}^{n} k\,x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} k\,x^k = f_n(x).$$

17. *Simplification.* Soit n un entier naturel.

(a) Rappeler la simplification usuelle de la somme $g_n(x)$ en fonction du réel x.

Si $x \neq 1,\ g_n(x) = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ et $g_n(1) = n+1$.

(b) En déduire que g_n est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$$g_n'(x) = \frac{1-(n+1)\,x^n + n\,x^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

— La fonction g_n est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par quotient de fonctions dérivables (de dénominateur non nul).

— Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Alors :

$$g_n'(x) = \frac{-(n+1)x^n \cdot (1-x) - (1-x^{n+1}) \cdot (-1)}{(1-x)^2} = \boxed{\frac{1-(n+1)\,x^n + n\,x^{n+1}}{(1-x)^2}}$$

18. *Application.*

(a) Retrouver à l'aide des questions précédentes les résultats de la question 15.

Les questions précédentes montrent que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$$f_n(x) = x\,g_n'(x) = \frac{x\left(1-(n+1)\,x^n + n\,x^{n+1}\right)}{(1-x)^2}$$

Pour $x = 0$, on retrouve : $f_n(0) = \dfrac{0\left(1-(n+1)0^n + n\,0^{n+1}\right)}{(1-0)^2} = 0.$

Pour $x = 2$, on retrouve :

$$f_n(2) = \frac{2\left(1-(n+1)2^n + n\,2^{n+1}\right)}{(1-2)^2} = \frac{2\left((2n-n-1)2^n + 1\right)}{1} = (n-1)\,2^{n+1} + 2$$

(b) Simplifier de même : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$

Il s'agit de calculer :

$$f_n(\tfrac{1}{2}) = \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{n+1}{2^n} + \frac{n}{2^{n+1}}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 2\left(1 + \frac{-2(n+1)+n}{2^{n+1}}\right) = \boxed{2 - \frac{n+2}{2^n}}$$

Exercice 4 (d'après EML 2011 E)

On considère la fonction $f :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f : x \longmapsto (x + \ln(x))e^{x-1}$$

19. *Étude de la fonction.*

(a) Justifier que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.

— La fonction f est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ par somme et produit de fonctions dérivables.
— Soit $x \in]0;+\infty[$. D'après les régles de dérivation :

$$f'(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{x-1} + (x + \ln(x))\, e^{x-1} = \boxed{\left(1 + \frac{1}{x} + x + \ln(x)\right) e^{x-1}}$$

(b) Établir :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad \ln(x) + \frac{1}{x} > 0.$$

Considérons la fonction auxiliaire $\varphi : x \mapsto \ln(x) + \dfrac{1}{x}$.
Elle est dérivable sur $]0;+\infty[$ par somme de fonctions dérivables, et pour tout $x \in]0;+\infty[$,

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$$

est du signe de $x - 1$ car $x^2 > 0$. Elle est donc décroissante sur $]0;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$, de sorte qu'elle admet un minimum (global) atteint en 1. Ainsi, pour tout $x \in I$, $\varphi(x) \geqslant \varphi(1)$.
Or $\varphi(1) = \ln(1) + \dfrac{1}{1} = 1$ donc $\varphi(1) > 0$ et l'inégalité demandée s'ensuit.

(c) En déduire :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad x + \ln(x) + 1 + \frac{1}{x} > 0.$$

Soit $x \in I$. Alors $x + 1 > 0$ (et même 1), donc d'après la question précédente :

$$x + \ln(x) + 1 + \frac{1}{x} > \ln(x) + \frac{1}{x} > 0.$$

(d) En déduire les variations de f.

Soit $x \in I$. Puisque $e^{x-1} > 0$, on sait d'après la question (a) que $f'(x)$ est de même signe que le facteur $1 + \dfrac{1}{x} + \ln(x) + x$. Compte tenu de la question (c) on en déduit que :

$$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]0;+\infty[}$$

(e) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe C_f de f au point d'abscisse 1.

La tangente est bien définie car f est dérivable en 1, et elle a pour équation :

$$y = \underbrace{f'(1)}_{3}(x-1) + \underbrace{f(1)}_{1}, \qquad \text{i.e.} \qquad \boxed{y = 3x - 2}$$

(f) Montrer que $f(x) \geqslant e^x$ sur $[e;+\infty[$, et $f(x) \leqslant \dfrac{1}{2e}\ln(x)$ sur $]0;e^{-1}]$.

Pour tout $x \in [e;+\infty[$, nous avons $x + \ln(x) \geqslant e + 1 \geqslant e$ et donc (puisque $e^{x-1} = \dfrac{e^x}{e} > 0$) :

$$\boxed{f(x) \geqslant e \times \frac{e^x}{e} = e^x}$$

Soit maintenant $x \in]0; e^{-1}]$. Alors $x + \dfrac{\ln(x)}{2} \leqslant 0$ par croissance car $e^{-1} + \dfrac{\ln(e^{-1})}{2} = \dfrac{1}{e} - \dfrac{1}{2} < 0$, d'où :

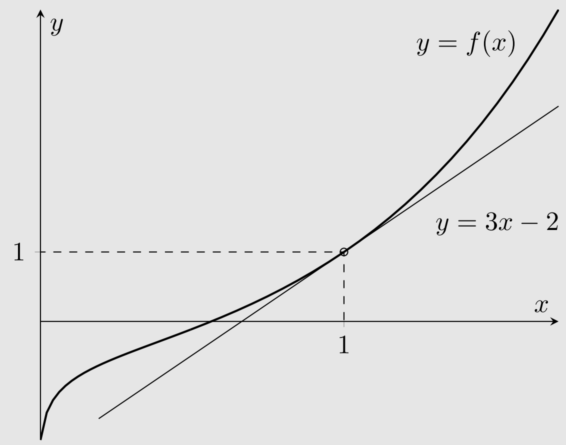
$$(x + \ln(x))\, e^{x-1} \leqslant \left(0 + \frac{1}{2}\ln(x)\right) e^{x-1} \qquad \text{(car } e^{x-1} > 0\text{)}$$

$$\boxed{\leqslant \frac{1}{2}\ln(x)e^{-1}} \qquad \text{(car } e^{x-1} \geqslant e^{0-1} \text{ et } \ln(x) < 0\text{)}$$

(g) Tracer l'allure de la courbe C_f.

On droit tracer un croquis qui tient compte des questions précédentes :

- f est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$;
- $f(1) = 1$ et C_f est tangente à la droite d'équation $y = 3x - 2$ en ce point ;
- l'allure de $f(x)$ pour $x \to +\infty$ est comparable à e^x ;
- l'allure de $f(x)$ pour $x \to 0$ est comparable à $\ln(x)$.



20. *Étude d'une suite récurrence associée.*

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2$.

Raisonnons par récurrence :

— À tout $n \in \mathbb{N}$, on associe la proposition $\mathcal{P}_n$: $\boxed{u_n \geqslant 2}$

— Pour $n = 0$, on sait que $u_n = 2$ donc $\mathcal{P}_0$ est trivialement vérifiée.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$ et montrons $\mathcal{P}_{n+1}$. On sait d'après $\mathcal{P}_n$ que $u_n \geqslant 2$. Or f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$, donc :

$$\underbrace{f(u_n)}_{u_{n+1}} \geqslant f(2), \qquad \text{avec} \quad f(2) = (2 + \underbrace{\ln(2)}_{\geqslant 0})\underbrace{e^{2-1}}_{\geqslant 1}, \qquad \text{d'où} \quad \boxed{u_{n+1} \geqslant 2} \quad (\mathcal{P}_{n+1})$$

— D'après le principe de récurrence, ceci montre que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}_n$.

(b) Établir, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant e^n$.

— À tout $n \in \mathbb{N}$, on associe la proposition $\mathcal{P}_n$: $\boxed{u_n \geqslant e^n}$

— Pour $n = 0$, on sait que $u_0 = 2$ et $e^0 = 1$ donc $\mathcal{P}_0$ est vérifiée.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$ et montrons $\mathcal{P}_{n+1}$. On a vu précédemment que $u_n \geqslant 2$, donc :

$$\begin{aligned}
\overbrace{(u_n + \ln(u_n))\, e^{u_n - 1}}^{u_{n+1}} &\geqslant (u_n + \ln(u_n))\, e^1 \\
&\geqslant (e^n + n)\, e^1 && \text{(d'après } \mathcal{P}_n\text{)} \\
&\geqslant e^{n+1}, && \text{d'où } \mathcal{P}_{n+1}.
\end{aligned}$$

— D'après le principe de récurrence, ceci montre que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}_n$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle majorée ?

Montrons qu'elle n'est pas majorée en raisonnant par l'absurde : on suppose qu'il existe un réel $M > 0$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$. D'après la question précédente, on aurait alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$e^n \leqslant M, \quad \text{d'où} \quad n \leqslant \ln(M), \quad \text{ce qui est absurde.}$$

(c) Exprimer, sous la forme d'une partie entière, un entier naturel n tel que $u_n \geqslant 10^{20}$.

D'après la question (b), il suffit de déterminer un entier n tel que $e^n \geqslant 10^{20}$. Or :

$$e^n \geqslant 10^{20} \iff n \geqslant \ln(10^{20}) \iff n \geqslant 20\ln(10).$$

Mais puisque $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$ pour tout réel x, l'inégalité précédente sera vérifiée automatiquement vérifiée pour l'entier naturel

$$\boxed{n = \lfloor 20\ln(10) \rfloor + 1}$$

21. *Étude d'un système d'équations associé.*
On considère le système suivant, qu'on notera $\mathcal{S}$, d'inconnue le couple $(x, y) \in]0; +\infty[^2$:

$$\begin{cases} f(x) = e^{(x+y)/2} \\ f(y) = e^{(x+y)/2} \end{cases}$$

(a) Montrer que f est une bijection de $]0; +\infty[$ sur un intervalle qu'on ne demande pas de préciser.

On a déjà vu que sur l'intervalle $]0; +\infty[$, la fonction f est :

- continue (et même dérivable),
- strictement croissante.

C'est donc une bijection de $]0; +\infty[$ sur $f(]0; +\infty[)$ et de plus $f(]0; +\infty[)$ est un intervalle.

Remarque. Un calcul de limites montrerait que $f(]0; +\infty[) =]-\infty; +\infty[$.

(b) Établir que, pour tout $(x, y) \in]0; +\infty[^2$, le couple (x, y) est solution de $\mathcal{S}$ si et seulement si :

$$x = y \quad \text{et} \quad x + \ln(x) = e.$$

Soit $(x, y) \in]0; +\infty[^2$. Compte tenu des deux équations, si (x, y) est solution de $\mathcal{S}$ alors $f(x) = f(y)$ et donc $x = y$ puisque f est bijective. De plus :

$$\begin{aligned} (x, x) \text{ est solution} &\iff f(x) = e^x \\ &\iff (x + \ln(x))e^{x-1} = e^x \\ &\iff x + \ln(x) = e^1 \end{aligned}$$

(c) Montrer que l'équation $x + \ln(x) = e$, d'inconnue $x \in]0; +\infty[$ admet une solution et une seule, que l'on notera α, et montrer que : $1 < \alpha < e$. En déduire l'ensemble des solutions de $\mathcal{S}$.

— Soit $\varphi :]0; +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto x + \ln(x)$. Alors φ est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$ par somme de deux fonctions continues et strictement croissantes.

— C'est donc une bijection de $]0; +\infty[$ sur $\varphi(]0; +\infty[)$ et en particulier une bijection de $]1; e[$ sur $]1; e + 1[$ car $\varphi(1) = 1$ et $\varphi(e) = e + 1$.

— Ainsi $e \in]1; e + 1[$ donc il existe un réel $\alpha \in]1; e[$ tel que $\varphi(\alpha) = e$, et celui-ci est l'unique solution de $x + \ln(x) = e$ sur $]0; +\infty[$ par stricte croissance de φ sur cet intervalle.

(d) Soient λ et μ deux réels tels que $\lambda + \mu = 2f'(\alpha) - e^\alpha$ et $\lambda \times \mu = (f'(\alpha) - \frac{1}{2}e^\alpha)^2 - \frac{1}{4}e^{2\alpha}$.
Que peut-on dire des signes de λ et μ ?

On sait que $f(\alpha) = e^\alpha$ et d'après les calculs précédents,

$$f'(\alpha) = \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \alpha + \ln(\alpha)\right) e^{\alpha - 1} = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) e^{\alpha-1}}_{>0} + f(\alpha)$$

donc $f'(\alpha) > e^\alpha$. On en déduit que : $\lambda + \mu > 0$ et $\lambda \times \mu > 0$.

$$\boxed{\text{Ceci n'est possible que si } \lambda \text{ et } \mu \text{ sont tous deux strictement positifs.}}$$