Devoir surveillé n° 1

E1A

le samedi 29 septembre 2018

La calculatrice est interdite. Toutes les réponses devront être soigneusement justifiées et rédigées. Les résultats seront mis clairement en évidence. On respectera l'ordre et la numérotation des questions. On commencera chaque exercice sur une nouvelle page. Les ratures tout comme l'abus de blanc correcteur sont à proscrire.

Questions de cours

1. Soient P et Q deux propositions mathématiques.
   (a) Quelle est la négation de « $P \implies Q$ » ?
   (b) Quelle est la contraposée de « $P \implies Q$ » ?
   (c) Quelle est la rédaction type pour démontrer « $P \implies Q$ » ?
2. Soit u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R},\ u(x) > 0$. Soit v dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (a) Que peut-on dire de l'ensemble image $u(\mathbb{R})$?
   (b) Rappeler la définition de la fonction composée $v \circ u$.
   (c) Exprimer la dérivée de $v \circ u$.
   (d) Justifier que les fonctions suivantes sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et exprimer leurs dérivées :
   $$f : x \longmapsto \ln(u(x)), \qquad g : x \longmapsto \sqrt{u(x)}, \qquad h : x \longmapsto u(x)^{-2018}.$$
3. (a) Démontrer par une étude de fonction que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(x) \leqslant x - 1$.
   (b) En déduire que pour tout $t \in]-1; +\infty[,\ \ln(1+t) \leqslant t$.

Exercice 1

On considère les fonctions $u : x \longmapsto e^x + e^{-x}$ et $v : y \longmapsto \ln(y)$.

4. On pose $f = v \circ u$.
   (a) Expliciter la fonction f en précisant son domaine de définition.
   (b) Étudier ses variations.
   (c) Montrer qu'il existe un unique $x \in [0; 1]$ tel que $f(x) = 1$.
5. On pose $g = u \circ v$.
   (a) Expliciter la fonction g en précisant son domaine de définition.
   (b) Justifier que g est dérivable et que : $\forall x \in D_g,\ g'(x) = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x^2}$.
   (c) Déterminer l'image du segment $[\frac{1}{3}; 2]$ par g.

Exercice 2

Définition. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on dit que n est :

— un entier *pair* s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$;

— un entier *impair* s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$.

On admettra que tout entier $n \in \mathbb{Z}$ est soit pair, soit impair.

6. **Préliminaires.** Soit $n \in \mathbb{Z}$.
   (a) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{Z}$, l'entier $4m$ est pair.
   (b) En déduire que : si n est pair, alors n^2 est pair.
   (c) Montrer de même que : si n est impair, alors n^2 est impair.
   (d) Justifier alors que : n est pair si et seulement si n^2 est pair.
7. **Irrationalité.** Soient $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ deux entiers non nuls tels que $a = b\sqrt{2}$.
   (a) Montrer que a^2 est pair, puis qu'il existe $\alpha \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2\alpha$.
   (b) En déduire que b^2 est pair, puis qu'il existe $\beta \in \mathbb{Z}$ tel que $b = 2\beta$.
   (c) En déduire que la fraction $\dfrac{a}{b}$ n'est pas irréductible.
   (d) Démontrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 3

8. (a) Avec Scilab, comment créer un vecteur de 500 nombres régulièrement répartis de 0 à 10 ?
   (b) En déduire un programme qui trace le graphe de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0; 10]$.
9. Écrire un programme Scilab qui :
   — Demande à l'utilisateur d'entrer au clavier un nombre x.
   — Affiche « fonction non définie » si $x \leqslant 0$.
   — Affiche « trop grand » si $x > 0$ et $\ln(x)\, e^x > \pi$.
   — Affiche « bravo » dans les autres cas.

Problème

Dans tout l'exercice λ désignera un réel strictement positif et f_λ sera la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_\lambda(x) = e^{-\lambda x^2}.$$

Le but de l'exercice est l'étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f_\lambda(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

10. (a) Étudier la parité de la fonction f_λ.
    (b) i. Montrer que f_λ est majorée par 1. Est-ce un maximum ?
    ii. Montrer que f_λ est minorée.
    (c) Justifier que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'_\lambda(x) = -2\lambda x e^{-\lambda x^2}$.
    En déduire les variations de la fonction f_λ sur $\mathbb{R}$.
    (d) Prouver que f_λ n'a pas de minimum.

11. On considère la fonction auxiliaire $\phi_\lambda : x \mapsto \dfrac{f_\lambda(x)}{x}$ définie sur $]0;+\infty[$.
   (a) En admettant que $\lim\limits_{x\to 0} \phi_\lambda(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \phi_\lambda(x) = 0$, dresser le tableau de variation de ϕ_λ.
   (b) Montrer que ϕ_λ est une bijection de $]0;1[$ sur un intervalle $\phi_\lambda(]0;1[)$ que l'on précisera.
12. (a) Déduire de la question précédente que l'équation $f_\lambda(x) = x$, d'inconnue x, admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ et que cette solution appartient à $]0;1[$. On note ℓ_λ cette solution.
   (b) Calculer $\phi_\lambda\left(\dfrac{1}{\sqrt{2\lambda}}\right)$. En déduire que si $\lambda > \dfrac{e}{2}$, alors $\ell_\lambda > \dfrac{1}{\sqrt{2\lambda}}$.
13. On suppose dans cette question que $\lambda \leqslant \dfrac{1}{2}$.
   (a) Étudier les variations de f'_λ.
   (b) Montrer que f'_λ admet un minimum et un maximum sur $[0;1]$ tels que :

$$-1 < \min_{x\in[0;1]} f'_\lambda(x) \quad \text{et} \quad \max_{x\in[0;1]} f'_\lambda(x) < 1.$$

   Dans ces conditions, l'inégalité des accroissements finis (qui sera vue au second semestre) permettrait de montrer que la suite (u_n) tend vers ℓ_λ.

On revient au cas général, c'est-à-dire $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

14. On pose $g_\lambda = f_\lambda \circ f_\lambda$.
   (a) Rappeler la définition de « fonction strictement croissante ».
   (b) Montrer que g_λ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

   Dans ces conditions, on pourrait montrer que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont strictement monotones et convergentes.
15. (a) Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $g_\lambda(x) = x$ est inclus dans $]0;1[$. Vérifier que ℓ_λ est une solution de cette dernière équation.
   (b) Soit $x \in]0;1[$. Montrer que $g_\lambda(x) = x$ si et seulement si $\ln(-\ln(x)) + 2\lambda x^2 - \ln(\lambda) = 0$.
   (c) Pour tout $x \in]0;1[$, on pose $h_\lambda(x) = \ln(-\ln(x)) + 2\lambda x^2 - \ln(\lambda)$.
   Montrer que la fonction h_λ est dérivable sur $]0;1[$ et que, sur cet intervalle, $h'_\lambda(x)$ est de signe opposé à celui de $1 + 4\lambda x^2 \ln(x)$.
   (d) Pour tout $x \in]0;1[$, on pose $k_\lambda(x) = 1 + 4\lambda x^2 \ln(x)$.
   En admettant que $\lim\limits_{x\to 0} k_\lambda(x) = 1$, dresser le tableau de variation de k_λ sur $]0;1[$.
   (e) On se place désormais dans le cas où $\lambda > \dfrac{e}{2}$.
      i. Montrer que, dans ce cas, $k_\lambda(\ell_\lambda) < 0$.
      ii. Dresser le tableau de variation de la fonction h_λ et en déduire que l'équation $h_\lambda(x) = x$ admet trois racines μ_λ, $\ell_\lambda, \nu_\lambda$ vérifiant $0 < \mu_\lambda < \ell_\lambda < \nu_\lambda < 1$.
      On admettra que $\lim\limits_{x\to 0} h_\lambda(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1} h_\lambda(x) = -\infty$.

   Dans ces conditions, on pourrait montrer que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers μ_λ et ν_λ respectivement.