Devoir surveillé n° 1

E1A

le samedi 29 septembre 2018

La calculatrice est interdite. Toutes les réponses devront être soigneusement justifiées et rédigées. Les résultats seront mis clairement en évidence. On respectera l'ordre et la numérotation des questions. On commencera chaque exercice sur une nouvelle page. Les ratures tout comme l'abus de blanc correcteur sont à proscrire.

Questions de cours

1. Soient P et Q deux propositions mathématiques.
   (a) Quelle est la négation de « $P \implies Q$ » ?

   P et non(Q) (la négation d'une implication n'est pas une implication !)

   (b) Quelle est la contraposée de « $P \implies Q$ » ?

   non(Q) $\implies$ non(P) (rappelons que ceci est *équivalent* à $P \implies Q$)

   (c) Quelle est la rédaction type pour démontrer « $P \implies Q$ » ?

   Supposons P. Alors [...] donc Q.

2. Soit u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R},\ u(x) > 0$. Soit v dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (a) Que peut-on dire de l'ensemble image $u(\mathbb{R})$?

   $u(\mathbb{R}) = \{u(x); x \in \mathbb{R}\}$ et tous ses éléments sont strictement positifs par hypothèse, donc $u(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+^*$.

   (b) Rappeler la définition de la fonction composée $v \circ u$.

   La composée $v \circ u$ est la fonction $x \mapsto v(u(x))$. Elle est définie sur $\mathbb{R}$ car $u(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+^*$.

   (c) Exprimer la dérivée de $v \circ u$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R},\ (v \circ u)'(x) = v'(u(x))\, u'(x)$.

   (d) Justifier que les fonctions suivantes sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et exprimer leurs dérivées :

$$f : x \longmapsto \ln(u(x)), \qquad g : x \longmapsto \sqrt{u(x)}, \qquad h : x \longmapsto u(x)^{-2018}.$$

   Elles sont dérivables par composition de u avec $y \mapsto \ln(y),\ y \mapsto \sqrt{y}$ et $y \mapsto y^{-2018}$ qui sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}, \qquad g'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}, \qquad h'(x) = -2018\, u(x)^{-2019} u'(x)$$

3. (a) Démontrer par une étude de fonction que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(x) \leqslant x - 1$.

   Vu en cours. On étudie les variations de la fonction $x \mapsto \ln(x) - (x-1)$ afin de montrer qu'elle est majorée par 0.

   (b) En déduire que pour tout $t \in]-1; +\infty[,\ \ln(1+t) \leqslant t$.

   Soit $t \in]-1; +\infty[$. Alors $1 + t > 0$, donc l'inégalité précédente s'applique avec $x = 1 + t$ et donne :

$$\ln(1+t) \leqslant (1+t) - 1$$

Exercice 1

On considère les fonctions $u : x \longmapsto e^x + e^{-x}$ et $v : y \longmapsto \ln(y)$.

4. On pose $f = v \circ u$.

   (a) Expliciter la fonction f en précisant son domaine de définition.

   Pour tout x réel, $f(x) = (v \circ u)(x) = v(u(x)) = v(e^x + e^{-x}) = \ln(e^x + e^{-x})$.
   Ceci est bien défini si et seulement si : $e^x + e^{-x} > 0$, ce qui est toujours vrai car $e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$.
   Conclusion : $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$

   (b) Étudier ses variations.

   — f est dérivable par composition de fonctions dérivables.

   — Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors par dérivation composée :

   $$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

   — Signe : $e^x + e^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $e^x - e^{-x} = e^{-x}(e^{2x} - 1)$, donc du signe de $e^{2x} - 1$ car $e^{-x} > 0$. Or $x \mapsto e^{2x} - 1$ croît strictement et s'annule en 0 donc on obtient :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f	$+\infty$	$\searrow$	$\ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

   (limites admises en $+\infty$ et $-\infty$)

   (c) Montrer qu'il existe un unique $x \in [0; 1]$ tel que $f(x) = 1$.

   Sur l'intervalle $[0; 1]$, la fonction f est :
   - strictement croissante,
   - continue (même dérivable),

   donc c'est une bijection de $[0; 1]$ sur $f([0; 1])$ et de plus $f([0; 1]) = [f(0); f(1)] = [\ln(2); \ln(e + e^{-1})]$.
   Or $\ln(2) \leqslant 1 \leqslant \ln(e + e^{-1})$ par croissance de ln car $2 \leqslant e \leqslant e + e^{-1}$, donc $1 \in f([0; 1])$.
   Par bijectivité, on en déduit que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution dans $[0; 1]$.

5. On pose $g = u \circ v$.

   (a) Expliciter la fonction g en précisant son domaine de définition.

   Pour tout y réel, $g(y) = (u \circ v)(y) = u(v(y)) = u(\ln(y)) = e^{\ln(y)} + e^{-\ln(y)}$. Ceci est bien défini si et seulement $y > 0$. Donc $D_g = \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, on peut de plus simplifier :

   $$g(y) = e^{\ln(y)} + e^{-\ln(y)} = e^{\ln(y)} + e^{\ln(1/y)} = \boxed{y + \frac{1}{y}}$$

   (b) Justifier que g est dérivable et que : $\forall x \in D_g,\ g'(x) = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x^2}$.

   — g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par somme (ou composition) de fonctions dérivables.

   — Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$. Alors :

   $$g'(y) = 1 - \frac{1}{y^2} = \frac{y^2 - 1}{y^2} = \frac{(y-1)(y+1)}{y^2}$$

   (c) Déterminer l'image du segment $[\frac{1}{3}; 2]$ par g.

   Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $x + 1 > 0$ et $x^2 > 0$ donc $g'(x)$ est de même signe que $x - 1$. Ainsi :

x	0		1		$+\infty$
signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de g	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

(limites admises en $+\infty$ et 0)

Sur les intervalles $[\frac{1}{3}; 1]$ et $[1; 2]$, la fonction g est :

- strictement monotone,
- continue (même dérivable),

donc c'est une bijection de $[\frac{1}{3}; 1]$ sur $g([\frac{1}{3}; 1])$, et aussi de $[1; 2]$ sur $g([1; 2])$. De plus,

$$g([\tfrac{1}{3}; 1]) = \big[g(1); g(\tfrac{1}{3})\big] = \big[2; 3 + \tfrac{1}{3}\big] \qquad \text{et} \qquad g([1; 2]) = [g(1); g(2)] = \big[2; 2 + \tfrac{1}{2}\big]$$

Or $3 + \frac{1}{3} > 2 + \frac{1}{2}$ donc $[2; 3 + \frac{1}{3}] \cup [2; 2 + \frac{1}{2}] = [2; 3 + \frac{1}{3}]$. Conclusion : $\boxed{g\left(\left[\frac{1}{3}; 2\right]\right) = \left[2; \frac{10}{3}\right]}$

Exercice 2

Définition. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on dit que n est :

— un entier *pair* s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$;

— un entier *impair* s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$.

On admettra que tout entier $n \in \mathbb{Z}$ est soit pair, soit impair.

6. **Préliminaires.** Soit $n \in \mathbb{Z}$.

   (a) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{Z}$, l'entier $4m$ est pair.

   Soit $m \in \mathbb{Z}$. Posons $k = 2m$. Alors $k \in \mathbb{Z}$ et $4m = 2k$ donc $4m$ est pair.

   (b) En déduire que : si n est pair, alors n^2 est pair.

   Supposons que n est pair. On dispose donc de k tel que $n = 2k$.
   Alors $n^2 = 4k^2$ est pair d'après la question précédente (avec $m = k^2$).

   (c) Montrer de même que : si n est impair, alors n^2 est impair.

   Supposons que n est impair. On dispose donc de k tel que $n = 2k + 1$.
   Alors $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$.
   En posant $k' = 2k^2 + 2k$, on a donc $n^2 = 2k' + 1$ et $k' \in \mathbb{Z}$. Donc n^2 est impair.

   (d) Justifier alors que : n est pair si et seulement si n^2 est pair.

   On raisonne par double implication :

   ($\Rightarrow$) On a déjà vu que si n est pair, alors n^2 est pair.

   ($\Leftarrow$) Supposons que n^2 est pair et montrons que n est pair en raisonnant par l'absurde. On suppose donc que n est impair, et on en déduit que n^2 est impair, d'où une contradiction.

7. **Irrationalité.** Soient $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ deux entiers non nuls tels que $a = b\sqrt{2}$.

   (a) Montrer que a^2 est pair, puis qu'il existe $\alpha \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2\alpha$.

   On sait que $a^2 = (b\sqrt{2})^2 = 2b^2$, donc a^2 est pair. D'après les préliminaires, on en déduit que a aussi est pair. On dispose donc d'un entier $\alpha \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2\alpha$.

   (b) En déduire que b^2 est pair, puis qu'il existe $\beta \in \mathbb{Z}$ tel que $b = 2\beta$.

   Puisque $a^2 = 2b^2$, on obtient alors $4\alpha^2 = 2b^2$ et donc $2\alpha^2 = b^2$. Ceci montre que b^2 est pair, donc d'après les préliminaires b aussi est pair. On dispose donc d'un entier $\beta \in \mathbb{Z}$ tel que $b = 2\beta$.

(c) En déduire que la fraction $\frac{a}{b}$ n'est pas irréductible.

Cette fraction se réduit en simplifiant par 2 : $\frac{a}{b} = \frac{2\alpha}{2\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$.

(d) Démontrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Supposons au contraire que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Il existe alors deux entiers a, b non nuls tels que $\sqrt{2}$ puisse s'écrire comme fraction irréductible $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Mais alors $a = b\sqrt{2}$ et la question précédente montre que cette fraction ne peut pas être irréductible, d'où une contradiction.

Exercice 3

8. (a) Avec Scilab, comment créer un vecteur de 500 nombres régulièrement répartis de 0 à 10 ?

On obtient un tel vecteur avec : `linspace(0,10,500)`

(b) En déduire un programme qui trace le graphe de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0; 10]$.

```
x = linspace(0,10,500)
plot(x, sqrt)
```

9. Écrire un programme Scilab qui :
   - Demande à l'utilisateur d'entrer au clavier un nombre x.
   - Affiche « fonction non définie » si $x \leqslant 0$.
   - Affiche « trop grand » si $x > 0$ et $\ln(x)\, e^x > \pi$.
   - Affiche « bravo » dans les autres cas.

```
x = input("Je vous prie de choisir un nombre, maître : ")
if x <= 0 then
  disp("fonction non définie")
elseif log(x)*exp(x) > %pi then
  disp("trop grand")
else
  disp("bravo")
end
```

Problème (d'après ESCP 1997)

Dans tout l'exercice λ désignera un réel strictement positif et f_λ sera la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_\lambda(x) = e^{-\lambda x^2}.$$

Le but de l'exercice est l'étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f_\lambda(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

10. (a) Étudier la parité de la fonction f_λ.

- Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$, qui est symétrique.
- De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad f_\lambda(-x) = e^{-\lambda(-x)^2} = e^{-\lambda x^2} = f_\lambda(x)$.

Conclusion : $\boxed{f_\lambda \text{ est une fonction paire.}}$

(b) i. Montrer que f_λ est majorée par 1. Est-ce un maximum ?

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $-\lambda x^2 \leqslant 0$ et donc par croissance de la fonction exponentielle : $e^{-\lambda x^2} \leqslant e^0$, c'est-à-dire $f_\lambda(x) \leqslant 1$. Ceci montre que f_λ est majorée par 1.
- Il s'agit bien d'un maximum car cette valeur est atteinte : $f_\lambda(0) = 1$.

ii. Montrer que f_λ est minorée.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-\lambda x^2} > 0$ donc f_λ est minorée par 0.

(c) Justifier que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'_\lambda(x) = -2\lambda x e^{-\lambda x^2}$.
En déduire les variations de la fonction f_λ sur $\mathbb{R}$.

— f_λ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition de fonctions dérivables.

— Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors : $f'_\lambda(x) = e^{-\lambda x^2}(-2\lambda x)$.

— Étude de signe : $e^{-\lambda x^2} > 0$ et $2\lambda > 0$, donc $f'_\lambda(x)$ est du signe de $-x$.

— On en déduit le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

(où on admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\lambda x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-\lambda x^2} = 0$)

(d) Prouver que f_λ n'a pas de minimum.

11. On considère la fonction auxiliaire $\phi_\lambda : x \mapsto \dfrac{f_\lambda(x)}{x}$ définie sur $]0;+\infty[$.

(a) En admettant que $\lim\limits_{x\to 0} \phi_\lambda(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \phi_\lambda(x) = 0$, dresser le tableau de variation de ϕ_λ.

— La fonction ϕ_λ est bien définie sur $]0;+\infty[$,

— elle est dérivable par quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

— Soit $x \in]0;+\infty[$. Alors :

$$\phi'_\lambda(x) = \frac{f'_\lambda(x)\cdot x - f_\lambda(x)\cdot 1}{x^2} = \boxed{\frac{-e^{-\lambda x^2}(2\lambda x^2+1)}{x^2}}$$

— Étude de signe : $e^{-\lambda x^2} > 0$ et $x^2 > 0$, de même que $2\lambda x^2 + 1$ car $\lambda > 0$. Donc $\phi'_\lambda(x) < 0$.

— En admettant les limites, on en déduit le tableau suivant :

x	0		$+\infty$
signe de $\phi'_\lambda(x)$		$+$	
variations de ϕ_λ	$+\infty$	$\searrow$	0

(b) Montrer que ϕ_λ est une bijection de $]0;1[$ sur un intervalle $\phi_\lambda\,(]0;1[)$ que l'on précisera.

Puisque $]0;1[\subset]0;+\infty[$, on sait que sur cet intervalle $]0;1[$ la fonction ϕ_λ est :

— continue (même dérivable),

— strictement décroissante.

C'est donc une bijection de $]0;1[$ sur $\phi_\lambda(]0;1[)$ et de plus :

$$\phi_\lambda(]0;1[) =]\phi_\lambda(1);+\infty[= \boxed{\left]e^{-\lambda};+\infty\right[}$$

12. (a) Déduire de la question précédente que l'équation $f_\lambda(x) = x$, d'inconnue x, admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ et que cette solution appartient à $]0;1[$. On note ℓ_λ cette solution.

— Pour tout $x \in]0;+\infty[$, on a : $f_\lambda(x) = x \iff \dfrac{f_\lambda(x)}{x} = 1 \iff \phi_\lambda(x) = 1$.

Or $1 \in \phi_\lambda\,(]0;1[)$ car $\lambda > 0$ implique $e^{-\lambda} < 1$. Donc, par bijectivité, l'équation $\phi_\lambda(x) = 1$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0;1[$. Puisque ϕ_λ est strictement décroissante, il n'y en a pas d'autre dans $]0;+\infty[$.

— Il n'y a pas de solution $x \in]-\infty;0]$ car dans ce cas $x \leqslant 0$ alors que $f_\lambda(x) > 0$.

(b) Calculer $\phi_\lambda\left(\dfrac{1}{\sqrt{2\lambda}}\right)$. En déduire que si $\lambda > \dfrac{e}{2}$, alors $\ell_\lambda > \dfrac{1}{\sqrt{2\lambda}}$.

$$\phi_\lambda\left(\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\right) = \frac{e^{-\lambda(\frac{1}{\sqrt{2\lambda}})^2}}{\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}} = e^{-\lambda\frac{1}{2\lambda}} \times \frac{\sqrt{2\lambda}}{1} = \sqrt{2\lambda}e^{-\frac{1}{2}} = \boxed{\sqrt{\frac{2\lambda}{e}}}$$

Supposons maintenant $\lambda > \frac{e}{2}$. Alors $\frac{2\lambda}{e} > 1$ et donc $\phi_\lambda\left(\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\right) > 1$, tandis que $\phi_\lambda(\ell_\lambda) = 1$. Mais puisque ϕ_λ est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$,

$$\phi_\lambda\left(\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\right) > \phi_\lambda(\ell_\lambda) \iff \boxed{\frac{1}{\sqrt{2\lambda}} < \ell_\lambda}$$

et l'inégalité demandée s'ensuit.

13. On suppose dans cette question que $\lambda \leqslant \frac{1}{2}$.

(a) Étudier les variations de f'_λ.

On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'_\lambda(x) = -2\lambda x e^{-\lambda x^2}$, donc :

— f'_λ est définie sur $\mathbb{R}$ et elle est dérivable par produit et composition de fonctions dérivables.

— Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} f''_\lambda(x) &= -2\lambda e^{-\lambda x^2} + -2\lambda x e^{-\lambda x^2}(-2\lambda x) \\ &= -2\lambda e^{-\lambda x^2}(1 - 2\lambda x^2) \\ &= \boxed{2\lambda e^{-\lambda x^2}(2\lambda x^2 - 1)} \end{aligned}$$

— Étude de signe : $2\lambda e^{-\lambda x^2} > 0$ donc $f''_\lambda(x)$ est du signe de $2\lambda x^2 - 1$. Or :

$$2\lambda x^2 - 1 = 0 \iff x^2 = \frac{1}{2\lambda} \iff \left(x = \sqrt{\frac{1}{2\lambda}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{1}{2\lambda}}\right),$$

donc puisque $x \mapsto 2\lambda x^2 - 1$ est un polynôme du second degré :

x	$-\infty$		$\frac{-1}{\sqrt{2\lambda}}$		$\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$		$+\infty$
signe de $f''_\lambda(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de f'_λ	0	$\nearrow$	$f'_\lambda(\frac{-1}{\sqrt{2\lambda}})$	$\searrow$	$f'_\lambda(\frac{1}{\sqrt{2\lambda}})$	$\nearrow$	0

(où les limites en $+\infty$ et $-\infty$ sont admises)

(b) Montrer que f'_λ admet un minimum et un maximum sur $[0;1]$ tels que :

$$-1 < \min_{x\in[0;1]} f'_\lambda(x) \quad \text{et} \quad \max_{x\in[0;1]} f'_\lambda(x) < 1.$$

La fonction f'_λ est décroissante sur $[0;1]$ car $\frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \geqslant 1$ compte tenu de l'hypothèse $\lambda \leqslant \frac{1}{2}$. Elle admet donc un minimum et un maximum, atteints aux extrémités du segment :

$$\boxed{\max_{x\in[0;1]} f'_\lambda(x) = f'_\lambda(0) = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\min_{x\in[0;1]} f'_\lambda(x) = f'_\lambda(1) = -2\lambda e^{-\lambda}}$$

Le fait que $0 < \lambda \leqslant \frac{1}{2}$ entraîne $-2\lambda e^{-\lambda} \geqslant -e^{-\lambda} > -1$. De plus, il est clair que $0 < 1$.

Dans ces conditions, l'inégalité des accroissements finis (qui sera vue au second semestre) permettrait de montrer que la suite (u_n) tend vers ℓ_λ.

On revient au cas général, c'est-à-dire $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

14. On pose $g_\lambda = f_\lambda \circ f_\lambda$.

 (a) Rappeler la définition de « fonction strictement croissante ».

 Une fonction f est dite strictement croissante sur un domaine D si :

 $$\forall (x_1, x_2) \in D^2, \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$$

 (b) Montrer que g_λ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

 Soient $(x_2, x_2) \in [0; +\infty[^2$. Supposons $x_1 < x_2$. Alors $f_\lambda(x_1) > f_\lambda(x_2)$ car f_λ décroît strictement sur $[0; +\infty[$. De plus $f_\lambda(x_1)$ et $f_\lambda(x_2)$ sont encore dans $[0; +\infty[$ car f_λ est à valeurs positives, donc :

 $$f_\lambda(x_1) > f_\lambda(x_2) \quad \implies \quad \underbrace{f_\lambda(f_\lambda(x_1))}_{g_\lambda(x_1)} < \underbrace{f_\lambda(f_\lambda(x_2))}_{g_\lambda(x_2)},$$

 ce qui permet de conclure.

Dans ces conditions, on pourrait montrer que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont strictement monotones et convergentes.

15. (a) Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $g_\lambda(x) = x$ est inclus dans $]0; 1[$. Vérifier que ℓ_λ est une solution de cette dernière équation.

 — Soit $x \in \mathbb{R}$ une solution, c'est-à-dire que $f_\lambda(f_\lambda(x)) = x$. Alors $x = f_\lambda(y) = e^{-\lambda y^2}$ pour $y = f_\lambda(x)$. Or $y = e^{-\lambda x^2} > 0$ donc $0 < e^{-\lambda y^2} < 1$, c'est-à-dire $x \in]0; 1[$.

 — Par définition de ℓ_λ, on sait que $f_\lambda(\ell_\lambda) = \ell_\lambda$. Donc ℓ_λ est solution car :

 $$\underbrace{f_\lambda(f_\lambda(\ell_\lambda))}_{g_\lambda(\ell_\lambda)} = f_\lambda(\ell_\lambda) = \ell_\lambda.$$

 (b) Soit $x \in]0; 1[$. Montrer que $g_\lambda(x) = x$ si et seulement si $\ln(-\ln(x)) + 2\lambda x^2 - \ln(\lambda) = 0$.

 En notant $y = f_\lambda(x) = e^{-\lambda x^2}$, on a :

 $$\begin{aligned} g_\lambda(x) = x &\iff f_\lambda(y) = x \\ &\iff e^{-\lambda y^2} = x \\ &\iff \lambda y^2 = -\ln(x) \\ &\iff \ln(\lambda) + 2\ln(y) = \ln(-\ln(x)) \\ &\iff \ln(\lambda) - 2\lambda x^2 = \ln(-\ln(x)) \\ &\iff 0 = \ln(-\ln(x)) + 2\lambda x^2 - \ln(\lambda). \end{aligned}$$

 (c) Pour tout $x \in]0; 1[$, on pose $h_\lambda(x) = \ln(-\ln(x)) + 2\lambda x^2 - \ln(\lambda)$.
 Montrer que la fonction h_λ est dérivable sur $]0; 1[$ et que, sur cet intervalle, $h'_\lambda(x)$ est de signe opposé à celui de $1 + 4\lambda x^2 \ln(x)$.

 — $h_\lambda(x)$ est bien défini si et seulement si :
 - $\ln(x)$ est bien défini, c'est-à-dire $x > 0$;
 - $\ln(y)$ est bien défini pour $y = -\ln(x)$, c'est-à-dire $-\ln(x) > 0$, ce qui équivaut à $x < e^{-0}$.

 Ainsi, h_λ a pour domaine de définition $]0; 1[$.

 — De plus, elle est dérivable par composition et combinaison linéaire de fonctions dérivables.

 — Soit $x \in]0; 1[$. Alors :

 $$h'_\lambda(x) = \overbrace{\frac{1}{-\ln(x)}(-\frac{1}{x})}^{\text{« dérivée composée »}} + 4\lambda x = \frac{1}{x\ln(x)} + 4\lambda x = \frac{1 + 4\lambda x^2 \ln(x)}{x\ln(x)}.$$

 — Étude de signe : $x > 0$ et $\ln(x) < 0$, donc $h'_\lambda(x)$ est de signe opposé à celui du dénominateur.

 (d) Pour tout $x \in]0; 1[$, on pose $k_\lambda(x) = 1 + 4\lambda x^2 \ln(x)$.
 En admettant que $\lim\limits_{x\to 0} k_\lambda(x) = 1$, dresser le tableau de variation de k_λ sur $]0; 1[$.

— k_λ est bien définie sur $]0;1[$ et elle est dérivable par somme et produit de fonctions dérivables.

— Soit $x \in]0;1[$. Alors :

$$k'_\lambda(x) = 8\lambda x \ln(x) + 4\lambda x^2 \frac{1}{x} = 4\lambda x\,(2\ln(x)+1).$$

— $4\lambda x > 0$ donc $k'_\lambda(x)$ est du signe de $2\ln(x)+1$. On en déduit :

x	0		$e^{-1/2}$		1
signe de $k'_\lambda(x)$		$-$	0	$+$	
variations de k_λ	1	$\searrow$	$k_\lambda(e^{-1/2})$	$\nearrow$	$k_\lambda(1)$

avec $k_\lambda(1) = 1$ et $k_\lambda(e^{-1/2}) = 1 - 2\lambda e^{-1}$.

(e) On se place désormais dans le cas où $\lambda > \dfrac{e}{2}$.

i. Montrer que, dans ce cas, $k_\lambda(\ell_\lambda) < 0$.

On sait que ℓ_λ est solution de $x = e^{-\lambda x^2}$ et donc aussi de $\ln(x) = -\lambda x^2$ et $4\lambda x^2 \ln(x) = -4\lambda^2 x^4$. Ainsi :

$$\boxed{k_\lambda(\ell_\lambda) = 1 - 4\lambda^2(\ell_\lambda)^4 < 0 \quad \text{car} \quad \ell_\lambda > \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \text{ (question 12b)}}$$

ii. Dresser le tableau de variation de la fonction h_λ et en déduire que l'équation $h_\lambda(x) = x$ admet trois racines μ_λ, $\ell_\lambda, \nu_\lambda$ vérifiant $0 < \mu_\lambda < \ell_\lambda < \nu_\lambda < 1$.
On admettra que $\lim\limits_{x\to 0} h_\lambda(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1} h_\lambda(x) = -\infty$.

On remarque que k_λ admet pour minimum $1 - 2\lambda e^{-1} < 0$. Le théorème de la bijection montre alors que l'équation $k_\lambda(x) = 0$ admet exactement une solution dans $]0; e^{-1/2}[$ et une solution dans $]e^{-1/2}; 0[$. Notons $\alpha_\lambda < \beta_\lambda$ ces deux solutions.
Puisque h'_λ est de signe opposé à k_λ, on obtient :

x	0		α_λ		β_λ		1
signe de $h'_\lambda(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
variations de h_λ	$+\infty$	$\searrow$	$h_\lambda(\alpha_\lambda)$	$\nearrow$	$h_\lambda(\beta_\lambda)$	$\searrow$	$-\infty$

Remarquons que nécessairement $\alpha_\lambda < \ell_\lambda < \beta_\lambda$ car $h'_\lambda(\ell_\lambda) > 0$ d'après la question précédente. Or $h_\lambda(\ell_\lambda) = 0$ car ℓ_λ est solution de $g_\lambda(x) = x$, donc on en déduit que $h_\lambda(\alpha_\lambda) < 0 < h_\lambda(\beta_\lambda)$ par stricte croissance de h_λ sur $[\alpha_\lambda; \beta_\lambda]$.
Le théorème de la bijection entraîne alors l'existence d'exactement une solution de l'équation $h_\lambda(x) = 0$ dans chacun des intervalles $]0; \alpha_\lambda[$ et $]\beta_\lambda; 1[$. En les notant μ_λ et ν_λ respectivement, on obtient la suite d'inégalités :

$$0 < \mu_\lambda < \alpha_\lambda < \ell_\lambda < \beta_\lambda < \nu_\lambda < 1.$$

Dans ces conditions, on pourrait montrer que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers μ_λ et ν_λ respectivement.