Devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 6

E1A

Correction

Échauffement

Pour tout entier naturel n, on considère l'application φ_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_n(x) = (1-x)^n e^{-2x}$$

ainsi que l'intégrale

$$I_n = \int_0^1 \varphi_n(x)\,dx.$$

1. Calculer I_0 et I_1.

On calcule I_0 directement à l'aide d'une primitive :

$$I_0 = \int_0^1 (1-x)^0 e^{-2x}\,dx = \int_0^1 e^{-2x}\,dx = \left[\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^1 = \boxed{-\frac{e^{-2}}{2} + \frac{1}{2}}$$

Utilisons une intégration par parties pour calculer I_1, en dérivant la fonction $x \mapsto (1-x)$, qui est de classe C^1, afin de se ramener à une constante :

$$I_1 = \int_0^1 (1-x)e^{-2x}\,dx = \left[(1-x)\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^1 - \int_0^1 (-1)\frac{e^{-2x}}{-2}\,dx$$

Les deux termes se calculent facilement :

$$\left[(1-x)\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^1 = 0 + \frac{1}{2}, \qquad \int_0^1 (-1)\frac{e^{-2x}}{-2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-2x}\,dx = \frac{I_0}{2}$$

D'où finalement :

$$I_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(-\frac{e^{-2}}{2} + \frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{e^{-2}}{4} + \frac{1}{4}}$$

2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n$$

Appliquons la formule d'intégration par parties, en dérivant la fonction $x \mapsto (1-x)^{n+1}$ (qui est bien de classe C^1) pour abaisser le degré :

$$\begin{aligned} 2I_{n+1} = \int_0^1 (1-x)^{n+1}\,2e^{-2x}\,dx &= \left[(1-x)^{n+1}\frac{e^{-2x}}{-1}\right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)(1-x)^n\,e^{-2x}\,dx \\ &= 0 - (-e^0) - (n+1)\int_0^1 (1-x)^n e^{-2x}\,dx \\ &= 1 - (n+1)I_n. \end{aligned}$$

1 Premier exercice (Concours blanc de juin 2016)

Avertissement : La correction de cet exercice a été rédigée par Mme Laqueille (E1B). Ne soyez pas étonnés si les notations diffèrent légèrement de celles auxquelles vous êtes habitués.

On considère les matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, ainsi que $M = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

3. **Première méthode pour calculer M^n :**

(a) Exprimer J^2 en fonction de J. En déduire l'expression de J^3, J^4 et J^5 en fonction de J.
Quelle conjecture peut-on émettre pour les puissances de J ? Démontrer cette conjecture.

Un calcul direct nous donne $J^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3J.$

Il en découle que :

$$\begin{aligned} J^3 &= J^2 \times J = 3J \times J = 3J^2 = 3^2 J \quad J^4 = J^3 \times J = 3^2 J \times J = 3^2 J^2 = 3^3 J \\ J^5 &= J^4 \times J = 3^3 J \times J = 3^3 J^2 = 3^4 J \end{aligned}$$

On conjecture que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad J^n = 3^{n-1} J}$

Pour le prouver, on procède par récurrence en notant $(\mathcal{P}_n)$ l'assertion « $J^n = 3^{n-1}J$ »
.

Initialisation. Pour $n = 1$, $J^n = J$ et $3^{n-1}J = 3^0 J = J$ donc $J^n = 3^{n-1}J$, ce qui démontre $(\mathcal{P}_1)$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, i.e. supposons que $J^n = 3^{n-1}J$ et montrons que $J^{n+1} = 3^n J$:

$$J^{n+1} = J^n \times J = 3^{n-1} J \times J = 3^{n-1} J^2 = 3^n J$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et on peut donc conclure la récurrence.

(b) Déterminer deux réels a et b tels que $M = aI + bJ$. Calculer le produit $M\left(2I - \frac{1}{3}J\right)$.
Établir que M est inversible et donner son inverse.

On procède par identification des coefficients

$$\begin{aligned} & M = aI + bJ \\ \Leftrightarrow \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad & \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & b & b \\ b & a+b & b \\ b & b & a+b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = \dfrac{2}{3} \\ b = \dfrac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = \dfrac{1}{6} \end{cases}$$

D'où finalement $\boxed{M = \frac{1}{2}I + \frac{1}{6}J}$

Par ailleurs, la calcul suivant est immédiat :

$$M\left(2I - \frac{1}{3}J\right) = \left(\frac{1}{2}I + \frac{1}{6}J\right)\left(2I - \frac{1}{3}J\right) = I + \frac{1}{3}J - \frac{1}{6}J - \frac{1}{18}J^2 = I + \frac{1}{6}J - \frac{1}{6} = I.$$

Par conséquent, la matrice M est inversible et son inverse est

$$M^{-1} = 2I - \frac{1}{3}J = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

(c) Montrer que, pour tout entier naturel n : $M^n = \dfrac{1}{2^n}I + \dfrac{1}{3}\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)J$.
La formule est-elle vraie pour $n = -1$?

On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : M^n = \dfrac{1}{2^n}I + \dfrac{1}{3}\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)J$

Initialisation $n = 0$: $M^0 = I$ et $\dfrac{1}{2^0}I + \dfrac{1}{3}\left(1 - \dfrac{1}{2^0}\right)J = I$ donc $M^0 = \dfrac{1}{2^0}I + \dfrac{1}{3}\left(1 - \dfrac{1}{2^0}\right)J$, ce qui démontre $(\mathcal{P}_0)$.

Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, i.e. supposons que $M^n = \dfrac{1}{2^n}I + \dfrac{1}{3}\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)J$ et montrons que $M^{n+1} = \dfrac{1}{2^{n+1}}I + \dfrac{1}{3}\left(1 - \dfrac{1}{2^{n+1}}\right)J$. En utilisant la question 1.b), on a

$$\begin{aligned}
M^{n+1} &= M^n \times M = \left[\frac{1}{2^n}I + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)J\right]\left[\frac{1}{2}I + \frac{1}{6}J\right] \\
&= \frac{1}{2^{n+1}}I + \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)J + \frac{1}{6\times 2^n}I + \frac{1}{18}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)J^2 \\
&= \frac{1}{2^{n+1}}I + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6\times 2^n} + \frac{1}{6\times 2^n}\right)J + \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)J = \frac{1}{2^{n+1}}I + \frac{1}{6}J + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6\times 2^n}\right)J \\
&= \frac{1}{2^{n+1}}I + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6\times 2^n}\right)J \\
&= \frac{1}{2^{n+1}}I + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2\times 2^n}\right)J \\
&= \frac{1}{2^{n+1}}I + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)J
\end{aligned}$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

En particulier, la matrice M^n s'écrit

$$M^n = \frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3\times 2^n} + \frac{1}{3} & -\frac{1}{3\times 2^n} + \frac{1}{3} & -\frac{1}{3\times 2^n} + \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3\times 2^n} + \frac{1}{3} & \frac{2}{3\times 2^n} + \frac{1}{3} & -\frac{1}{3\times 2^n} + \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3\times 2^n} + \frac{1}{3} & -\frac{1}{3\times 2^n} + \frac{1}{3} & \frac{2}{3\times 2^n} + \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Mentionnons une autre méthode bien connue et tellement plus élégante car plus rapide : celle du binôme de Newton. Toute tentative de preuve dans ce sens-là aura été récompensée, à condition d'avoir mentionné l'argument essentiel : à savoir que les matrices I et J commutent (car *« tout le monde commute avec l'identité »*). Plus précisément : comme les matrices I et J commutent, on peut écrire la formule du binôme de Newton matricielle :

$$\begin{aligned}
M^n = (aI + bJ)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^{n-k}b^k\, J^k = a^n\, I + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} a^{n-k}b^k\, J^k \\
&= a^n\, I + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} a^{n-k}b^k\, 3^{k-1}J \quad \text{d'après la question 1.a} \\
&= a^n\, I + \frac{1}{3}\Big(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} a^{n-k}b^k\, 3^k\Big)J = a^n\, I + \frac{1}{3}\Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^{n-k}b^k\, 3^k - \binom{n}{0} a^{n-0}b^0\, 3^0\Big)J \\
&= a^n\, I + \frac{1}{3}\Big((a+3b)^n - a^n\Big)J, \quad \text{d'après la formule du binôme de Newtion pour les réels.}
\end{aligned}$$

On retombe donc sur l'expression attendue grâce aux valeurs de a et b trouvées à la question précédente.

En faisant $n = -1$ dans la formule, on obtient l'égalité

$$M^{-1} = \frac{1}{2^{-1}} I + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^{-1}}\right) J = 2I + \frac{1}{3}(1-2)J = 2I - \frac{1}{3}J$$

qui est vraie d'après la question 1.b).

4. **Deuxième méthode pour calculer M^n :**

(a) Vérifier que $M^2 - \frac{3}{2}M = -\frac{1}{2}I$. Retrouver le fait que M est inversible.

$$\begin{aligned} M^2 &= \frac{1}{6^2}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}^2 = \frac{1}{6^2}\begin{pmatrix} 18 & 9 & 9 \\ 9 & 18 & 9 \\ 9 & 9 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ M^2 - \frac{3}{2}M &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}I \\ M\left(M - \frac{3}{2}I\right) &= -\frac{1}{2}I \Leftrightarrow M\left(-2M + 3I\right) = I \end{aligned}$$

donc la matrice M est inversible.

Remarque : son inverse est la matrice $M^{-1} = -2M + 3I = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$

(b) Montrer que pour entier $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels a_n et b_n tels que $M^n = a_n M + b_n I$.

Montrer que pour entier $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels a_n et b_n tels que $M^n = a_n M + b_n I$.
On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n)$: il existe deux réels a_n et b_n tels que $M^n = a_n M + b_n I$
Initialisation $n = 0$: $M^0 = I$ et recherchons deux réels a_0 et b_0 tel que $a_0 M + b_0 I = I$. On vérifie que $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$ convient bien puisque $0 \times M + 1 \times I = I = M^0$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+!})$, c'est-à-dire supposons qu'il existe deux réels a_n et b_n tels que $M^n = a_n M + b_n I$ et montrons qu'il existe deux réels a_{n+1} et b_{n+1} tels que $M^{n+1} = a_{n+1} M + b_{n+1} I$

$$M^{n+1} = M^n \times M = (a_n M + b_n I)\, M = a_n M^2 + b_n M = a_n\left(\frac{3}{2}M - \frac{1}{2}I\right) + b_n M = \left(\frac{3}{2}a_n + b_n\right) M - \frac{1}{2}a_n I$$

En choisissant les réels $a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n$, on a bien $M^{n+1} = a_{n+1}M + b_{n+1}I$ donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, ce qui achève la récurrence.

(c) Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n. Que valent a_0, b_0, a_1, b_1 ?

D'après la question 2.b), on a $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n + b_n \\ b_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n \end{cases}$ Puisque $\begin{cases} a_0 = 0 \\ b_0 = 1 \end{cases}$, on en déduit que $\begin{cases} a_1 = 1 \\ b_1 = 0 \end{cases}$

(d) Montrer que la suite a est récurrente linéaire d'ordre 2. En déduire l'expression de a_n et b_n.

$a_{n+2} = \frac{3}{2}a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{3}{2}a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n$.

Equation caractéristique : $x^2 = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 0$ dont les racines sont $\frac{1}{2}$ et 1.

Il existe donc deux réels c et d tels que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \alpha \left(\frac{1}{2}\right)^n + \beta 1^n = \alpha \left(\frac{1}{2}\right)^n + \beta$

Détermination de α et β :

$$\begin{cases} \alpha \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \beta = a_0 \\ \alpha \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \beta = a_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \frac{1}{2}\alpha + \beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}\alpha = -1 \\ \beta = 2 \end{cases} \left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n = -1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow b_n = -1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -1 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Par conséquent, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = \left[2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] M + \left[-1 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] I = \begin{pmatrix} \frac{2}{3 \times 2^n} + \frac{1}{3} & -\frac{1}{3 \times 2^n} + \frac{1}{3} & -\frac{1}{3 \times 2^n} + \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3 \times 2^n} + \frac{1}{3} & \frac{2}{3 \times 2^n} + \frac{1}{3} & -\frac{1}{3 \times 2^n} + \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3 \times 2^n} + \frac{1}{3} & -\frac{1}{3 \times 2^n} + \frac{1}{3} & \frac{2}{3 \times 2^n} + \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

5. **Troisième méthode pour calculer M^n** :
Voici l'extrait d'une session de calcul *Scilab* effectuée dans la console :

```
-->P = [1, 1, 0; -2, 1, -1; 1, 1, 1];
-->Q = [2, -1, -1; 1, 1, 1; -3, 0, 3];
-->P*Q
 ans  =

    3.    0.    0.
    0.    3.    0.
    0.    0.    3.
-->Q * [4, 1, 1; 1, 4, 1; 1, 1, 4] * P
 ans  =

    9.    0.     0.
    0.    18.    0.
    0.    0.     9.
```

(a) Déduire de cette session que $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et expliciter son inverse.

Le tableau donné dans le sujet nous donne $PQ = 3I \Leftrightarrow P\left(\frac{1}{3}Q\right) = I$ donc la matrice P est inversible et son inverse vaut

$$P^{-1} = \frac{1}{3}Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Déterminer aussi la matrice N vérifiant l'égalité : $M = PNP^{-1}$.

D'après le tableau, on peut affirmer que $Q(6M)P = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

ce qui peut se ré-écrire encore sous la forme : $6Q\,M\,P = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

Comme on a vu que $P^{-1} = \dfrac{1}{3}Q$, on a alors $3P^{-1} = Q$, et donc $6Q = 18P^{-1}$.

D'où finalement, $(18P^{-1})\,M\,P = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

En divisant par le réel 18, on obtient donc : $P^{-1}\,M\,P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Ce qui peut se lire aussi (en multipliant de part et d'autre par P "à gauche" et P^{-1} " à droite) : $M = PNP^{-1}$ avec $N = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(c) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = PN^nP^{-1}$ puis donner les neuf coefficients de M^n.

On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n)\quad M^n = PN^nP^{-1}$

Initialisation $n = 0$: $M^0 = I$ et $PN^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$ donc $M^0 = PN^0P^{-1}$ ce qui montre que $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $M^n = PN^nP^{-1}$ et montrons que $M^{n+1} = PN^{n+1}P^{-1}$.

$$M^{n+1} = M^n \times M = PN^n\underbrace{P^{-1}P}_{=I}NP^{-1} = PN^nNP^{-1} = PN^{n+1}P^{-1}$$

donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, ce qui achève la récurrence

Puisque N est une matrice diagonale, il est immédiat que $N^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix}$ ce qui nous permet d'écrire

$$PN^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{2^n} & 1 & -\frac{1}{2^n} \\ \frac{1}{2^n} & 1 & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix} \qquad M^n = PN^nP^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3\times 2^n} + \frac{1}{3} & -\frac{1}{3\times 2^n} + \frac{1}{3} & -\frac{1}{3\times 2^n} + \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3\times 2^n} + \frac{1}{3} & \frac{2}{3\times 2^n} + \frac{1}{3} & -\frac{1}{3\times 2^n} + \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3\times 2^n} + \frac{1}{3} & -\frac{1}{3\times 2^n} + \frac{1}{3} & \frac{2}{3\times 2^n} + \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

6. **Une application probabiliste** :

Un mobile se déplace aléatoirement dans l'ensemble des sommets d'un triangle ABC de la façon suivante : si, à l'instant n, il est sur l'un quelconque des trois sommets, alors à l'instant $(n+1)$, soit il y reste, avec une probabilité de $\dfrac{2}{3}$, soit il se place sur l'un des deux autres sommets, et ceci avec la même probabilité.

On note :

- A_n l'événement : « le mobile se trouve en A à l'instant n ».
- B_n l'événement : « le mobile se trouve en B à l'instant n ».
- C_n l'événement : « le mobile se trouve en C à l'instant n ».

On pose $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.

(a) Exprimer, pour tout entier naturel n, a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.

L'évènement A_{n+1} dépend de la position du mobile à l'instant n, c'est-à-dire des évènements A_n, B_n, C_n qui forment un système complet d'évènements. La formule des probabilités totales nous donne

$$\begin{array}{rcl}
P(A_{n+1}) & = & P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) + P(C_n \cap A_{n+1}) \\
& = & P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1}) = \dfrac{2}{3}P(A_n) + \dfrac{1}{6}P(B_n) + \dfrac{1}{6}P(C_n) \\
P(B_{n+1}) & = & P(A_n \cap B_{n+1}) + P(B_n \cap B_{n+1}) + P(C_n \cap B_{n+1}) \\
& = & P(A_n)P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(B_{n+1}) = \dfrac{1}{6}P(A_n) + \dfrac{2}{3}P(B_n) + \dfrac{1}{6}P(C_n) \\
P(C_{n+1}) & = & P(A_n \cap C_{n+1}) + P(B_n \cap C_{n+1}) + P(C_n \cap C_{n+1}) \\
& = & P(A_n)P_{A_n}(C_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(C_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(C_{n+1}) = \dfrac{1}{6}P(A_n) + \dfrac{1}{6}P(B_n) + \dfrac{2}{3}P(C_n)
\end{array}$$

ce qui nous donne $\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{2}{3}a_n + \dfrac{1}{6}b_n + \dfrac{1}{6}c_n \\ b_{n+1} = \dfrac{1}{6}a_n + \dfrac{2}{3}b_n + \dfrac{1}{6}c_n \\ c_{n+1} = \dfrac{1}{6}a_n + \dfrac{1}{6}b_n + \dfrac{2}{3}c_n \end{cases}$

(b) Exprimer $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix}$ en fonction de $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ puis montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$

Il est immédiat que $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

Pour l'autre égalité, on procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n)$: $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^n X_0$

Initialisation $n = 0$: $M^0 \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = I \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$ et montrons que $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M^{n+1} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M \times M^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = M^{n+1} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$$

donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, ce qui achève la récurrence. puis montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$

(c) En déduire l'expression de a_n, b_n et c_n et calculer les limites correspondantes.

En explicitant l'égalité précédente, on a

$$\begin{cases} a_n = a_0 \left(\dfrac{2}{3 \times 2^n} + \dfrac{1}{3} \right) + b_0 \left(-\dfrac{1}{3 \times 2^n} + \dfrac{1}{3} \right) + c_0 \left(-\dfrac{1}{3 \times 2^n} + \dfrac{1}{3} \right) \\ b_n = a_0 \left(-\dfrac{1}{3 \times 2^n} + \dfrac{1}{3} \right) + b_0 \left(\dfrac{2}{3 \times 2^n} + \dfrac{1}{3} \right) + c_0 \left(-\dfrac{1}{3 \times 2^n} + \dfrac{1}{3} \right) \\ c_n = a_0 \left(-\dfrac{1}{3 \times 2^n} + \dfrac{1}{3} \right) + b_0 \left(-\dfrac{1}{3 \times 2^n} + \dfrac{1}{3} \right) + c_0 \left(\dfrac{2}{3 \times 2^n} + \dfrac{1}{3} \right) \end{cases}$$

Il est immédiat que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = \frac{1}{3}a_0 + \frac{1}{3}b_0 + \frac{1}{3}c_0 = \frac{1}{3}(a_0+b_0+c_0) = \frac{1}{3}$$

car, la famille A_0, B_0, C_0 formant un système complet d'évènements, on a

$$P(A_0) + P(B_0) + P(C_0) = 1 \Leftrightarrow a_0 + b_0 + c_0 = 1$$

2 Deuxième exercice (d'après ECRICOME 2005, voie E)

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x\ln(x) - 1 & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^* \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

ainsi que les fonctions φ et g définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(x) = \frac{2}{x} + \ln(x) \qquad \text{et} \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x,y) = xe^y - ye^x.$$

2.1 Étude de deux suites associées à f.

7. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$ par opérations de fonctions usuelles (polynômes et logarithme) continues sur cet *intervalle ouvert*.
On étudie la continuité en 0 en calculant la limite à droite :

- par continuité, $x^2 - 1$ tend vers -1 pour $x \to 0$;
- par croissances comparées, $x\ln(x)$ tend vers 0 pour $x \to 0^+$.

Par somme de limites, f tend donc vers -1 en 0^+. Or $f(0) = -1$, donc f est continue en 0.
Ainsi, f est continue sur tout son domaine de définition $\mathbb{R}_+$.

8. Étudier la dérivabilité de la fonction f en 0. En donner une interprétation graphique.

On étudie la limite pour $x \to 0$ du taux d'accroissement :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 - x\ln(x) - 1 + 1}{x} = x - \ln(x)$$

Puisque $x \to 0$ et $\ln(x) \to -\infty$, ce taux tend vers $+\infty$ par opérations, donc :

$$\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en 0, sa courbe admet une demi-tangente verticale.}}$$

9. Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}_+^*$, puis dresser son tableau de variations en précisant la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers l'infini.

La fonction f est de classe C^2 (et même C^∞) sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations de fonctions usuelles C^2 sur cet intervalle ouvert. On calcule successivement ses deux premières dérivées : pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'(x) = 2x - \left(1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}\right) - 0 = \boxed{2x - \ln(x) - 1}, \qquad f''(x) = 2 - \frac{1}{x} = \boxed{\frac{2x-1}{x}}.$$

Ainsi, $f''(x)$ est du même signe que $2x - 1$ car $x > 0$ d'où le tableau :

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

On en déduit que :

$$\boxed{f \text{ est concave sur }]0, \tfrac{1}{2}], \text{ convexe sur } [\tfrac{1}{2}, +\infty[, \text{ avec un point d'inflexion en } \tfrac{1}{2}.}$$

De manière équivalente, f' est croissante sur $]0, \frac{1}{2}]$, décroissante sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$, et elle admet un minimum atteint en $\frac{1}{2}$ qui vaut

$$f'(\tfrac{1}{2}) = 1 - \ln(\tfrac{1}{2}) - 1 = \ln(2).$$

Puisque $\ln(2) > 0$, ceci montre que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) > 0$. Ainsi f est-elle strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, et donc aussi sur $\mathbb{R}_+$ par continuité en 0. La limite en $+\infty$ s'obtient par croissances comparées et opérations sur les limites (après factorisation) :

$$\frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \quad \text{donc} \quad f(x) = x^2\left(1 - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x^2}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

Le tableau de variations de f s'en déduit :

	0	$+\infty$
f	-1 $\nearrow$	$+\infty$

10. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Pour $x \to +\infty$, le même résultat de croissances comparées et les sommes de limites donnent :

$$\boxed{\frac{f(x)}{x} = x - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty} \quad \text{car} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Remarque. Dans cette situation, on dit que la courbe de f admet une branche parabolique en $+\infty$ dirigée par l'axe des ordonnées, parce qu'elle ressemble à la parabole d'équation $y = x^2$.

11. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur un intervalle J que l'on précisera.

Sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^* =]0; +\infty[$, la fonction f est :

- continue,
- strictement croissante.

Elle est donc bijective de $\mathbb{R}_+^*$ vers $J = f(\mathbb{R}_+^*)$. Compte tenu des limites $\lim_0 f = f(0) = -1$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$, le théorème de la bijection montre de plus que : $\boxed{J =]-1; +\infty[}$

12. Quel est le sens de variation de f^{-1} ? Déterminer la limite de $f^{-1}(x)$ lorsque x tend vers l'infini.

Le théorème de la bijection justifie, comme f, sa réciproque f^{-1} est strictement croissante. De plus :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f^{-1}(x) = +\infty} \quad \text{car} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

13. Justifier que pour tout entier naturel k, il existe un unique réel x_k positif tel que : $f(x_k) = k$.

On remarque que $\mathbb{N} \subset]-1; +\infty[$. Or f est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ vers $]-1; +\infty[$, donc tout $k \in \mathbb{N}$ admet un unique antécédent dans $\mathbb{R}_+^*$. De plus 0 n'est antécédent d'aucun élément de $\mathbb{N}$ car $f(0) = -1$.

14. (a) Donner la valeur de x_0.

   On remarque que $f(1) = 1 - \ln(1) - 1 = 0$. Par unicité, on a donc $\boxed{x_0 = 1}$

   (b) Exprimer x_k à l'aide de f^{-1} puis justifier que la suite (x_k) est croissante et déterminer sa limite lorsque k tend vers l'infini.

   Puisque f et f^{-1} sont réciproques, on a pour tout k entier naturel : $f(x_k) = k \iff x_k = f^{-1}(k)$.

Soient $(k,\ell) \in \mathbb{N}^2$ tels que $k \leqslant \ell$. Alors $x_k = f^{-1}(k)$ et $x_\ell = f^{-1}(\ell)$, donc $x_k \leqslant x_\ell$ par croissance de la fonction f^{-1}. Ceci montre que la suite (x_k) est croissante.

On sait que $f^{-1}(x) \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$, donc par composition de limites :

$$\boxed{x_k = f^{-1}(k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty}$$

Remarque. Il serait aussi possible (mais moins efficace) de raisonner par l'absurde à l'aide du théorème de la limite monotone.

15. On considère le script *Scilab* suivant, qui est incomplet :

```
function y = f(x)
  if ... then
    ...
  else
    y = -1
  end
endfunction


liste = ...

// évaluation de f(x) pour chaque x dans liste
valeurs = feval(liste,f)

format(4)
disp(liste)
disp(valeurs)
```

(a) Compléter les `...` dans le code de la fonction `f` afin qu'elle calcule $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

```
function y = f(x)
  if x <> 0 then
    y = x^2 - x*log(x) - 1
  else
    y = -1
  end
endfunction
```

(b) Compléter la ligne `liste = ...` de manière à ce que `liste` contienne la liste des nombres de $\frac{1}{2}$ à 4 régulièrement espacés de $\frac{1}{2}$.

```
liste = 0.5:0.5:4
```

(c) Lors de l'exécution du script complété, la console affiche :

```
   0.5    1.    1.5    2.    2.5    3.    3.5    4.

 - 0.4    0.    0.6    1.6    3.    4.7    6.9    9.5
```

Utiliser ce tableau de valeurs de f pour déterminer un encadrement de x_1 et de x_2.

On constate que $f(1{,}5) < 1 < f(2)$ et $f(2) < 2 < f(2{,}5)$. Par stricte croissante de f, on obtient :

$$\boxed{1{,}5 < x_1 < 2 \quad \text{et} \quad 2 < x_2 < 2{,}5}$$

16. On définit la suite (u_n) par :

$$u_0 = \frac{3}{2} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \varphi(u_n).$$

(a) Étudier les variations de φ sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations de fonctions usuelles dérivables.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors :

$$\varphi'(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-2}{x^2}$$

Puisque $x^2 > 0$, $\varphi'(x)$ est du signe de $x-2$: négatif sur $[0;2]$ et positif sur $[2;+\infty[$. Ainsi :

- φ est décroissante sur $[0;2]$,
- φ est croissante sur $[2;+\infty[$.

(b) On donne $\varphi(\frac{3}{2}) \simeq 1,73$ et $\varphi(2) \simeq 1,69$. Montrer que $\varphi(\left[\frac{3}{2};2\right]) \subset \left[\frac{3}{2};2\right]$.

Si l'on en croît les approximations $\varphi(\frac{3}{2}) < 2$ et $\varphi(2) > \frac{3}{2}$. Donc par décroissance de φ sur $[0;2]$:

$$\forall x \in [\tfrac{3}{2};2], \quad \tfrac{3}{2} < \varphi(2) < \varphi(x) < \varphi(\tfrac{3}{2}) < 2.$$

En particulier, $\boxed{\forall x \in [\frac{3}{2};2],\ \varphi(x) \in [\frac{3}{2};2]}$

(c) En étudiant les variations de φ', montrer que : $\forall x \in \left[\dfrac{3}{2};2\right], \quad |\varphi'(x)| \leq \dfrac{2}{9}$

La fonction φ' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in [\frac{3}{2};2]$,

$$\varphi''(x) = \frac{4}{x^3} - \frac{1}{x^2} = \frac{4-x}{x^3} > 0.$$

On en déduit que $\boxed{\varphi' \text{ est croissante sur cet intervalle}}$ et donc pour tout $x \in [\frac{3}{2};2]$,

$$\varphi(\tfrac{3}{2}) \leqslant \varphi'(x) \leqslant \varphi(2), \quad \text{c'est-à-dire} \quad -\frac{2}{9} \leqslant \varphi'(x) \leqslant 0, \quad \text{d'où} \quad \boxed{|\varphi'(x)| = -\varphi'(x) \leqslant \frac{2}{9}}$$

(d) Montrer que les équations $x = \varphi(x)$ et $f(x) = 1$ sont équivalentes. En déduire que le réel x_1 est l'unique solution de l'équation $x = \varphi(x)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on obtient en multipliant par x (non nul) :

$$x = \varphi(x) \iff x = \frac{2}{x} + \ln(x) \iff x^2 = 2 + x\ln(x) \iff x^2 - x\ln(x) - 1 = 1 \iff f(x) = 1.$$

Puisque x_1 est l'unique solution de $f(x) = 1$, c'est donc aussi l'unique solution de $x = \varphi(x)$.

(e) Pour tout entier naturel n, montrer que : $\dfrac{3}{2} \leqslant u_n \leqslant 2$

Raisonnons par récurrence en notant $\mathcal{A}_n$ l'assertion : $u_n \in [\frac{3}{2};2]$.
Initialisation. (pour $n = 0$) On sait que $u_0 = \frac{3}{2}$, donc $\mathcal{A}_0$ est vérifiée.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{A}_n$, c'est-à-dire que $u_n \in [\frac{3}{2};2]$. Mais alors $u_{n+1} = \varphi(u_n) \in [\frac{3}{2};2]$ car on a vu que $\varphi([\frac{3}{2};2]) \subset [\frac{3}{2};2]$. D'où $\mathcal{A}_{n+1}$.
Conclusion. Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{A}_n$.

(f) Pour tout entier naturel n, montrer que : $|u_{n+1} - x_1| \leqslant \dfrac{2}{9}\,|u_n - x_1|$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $x \mapsto |\varphi'(x)|$ est bornée par $\frac{2}{9}$ sur $[\frac{3}{2};2]$, l'inégalité des accroissements finis montre que :

$$|\varphi(u_n) - \varphi(x_1)| \leqslant \frac{2}{9}|u_n - x_1|.$$

Or $\varphi(u_n) = u_{n+1}$ par définition de la suite, et $\varphi(x_1) = x_1$ car on a vu précédemment que x_1 est solution de l'équation aux points fixes $x = \varphi(x)$. On obtient l'inégalité demandée.

(g) Pour tout entier naturel n, en déduire que : $|u_n - x_1| \leqslant \left(\dfrac{2}{9}\right)^n$

À l'aide de la question précédente, une récurrence immédiate permet de montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - x_1| \leqslant \left(\frac{2}{9}\right)^n |u_0 - x_1|$$

Il reste à vérifier que $|u_0 - x_1| \leqslant 1$, ce qui est vrai car $u_0 = \frac{3}{2}$ et on a vu que $\frac{3}{2} < x_1 < 2$.

(h) En déduire que la suite (u_n) converge et calculer sa limite.

La suite géométrique $(\frac{2}{9})^n$ tend vers 0 car $|\frac{2}{9}| < 1$. L'inégalité établie à la question précédente permet donc de déduire du théorème d'encadrement que $(u_n - x_1)$ converge vers 0, d'où :

$$\boxed{(u_n) \text{ converge vers } x_1}$$

2.2 Recherche d'extremum éventuel de g.

17. Calculer les dérivées partielles premières de la fonction g.

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on obient facilement :

$$\boxed{\partial_1 g(x,y) = e^y - ye^x, \qquad \partial_2 g(x,y) = xe^y - e^x}$$

18. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\partial_1 g(a,b) = \partial_2 g(a,b) = 0$. Montrer que :

$$\begin{cases} ab = 1 \\ a = e^{a - \frac{1}{a}} \end{cases}$$

En déduire que nécessairement :

$$\begin{cases} a > 0 \\ ab = 1 \\ f(a) = 0 \end{cases}$$

puis déterminer l'unique couple (a, b) solution.

L'hypothèse se traduit par : $e^b - be^a = 0$ et $e^a - ae^b = 0$, c'est-à-dire $e^b = be^a$ et $e^a = ae^b$.

En prenant le produit, on obtient : $e^{a+b} = ab\, e^{a+b}$, d'où $\boxed{ab = 1}$ car $e^{a+b} \neq 0$.

Ainsi $a \neq 0$ et $b = \dfrac{1}{a}$, donc $e^a = ae^b$ conduit à $\boxed{a = e^{a-b} = e^{a - \frac{1}{a}}}$

Cette dernière égalité montre que $\boxed{a > 0}$ car $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$.
En passant au logarithme puis en multipliant par a (non nul), on obtient de plus :

$$a = e^{a - \frac{1}{a}} \iff \ln(a) = a - \frac{1}{a} \iff a\ln(a) = a^2 - 1 \iff a^2 - a\ln(a) - 1 = 0 \iff \boxed{f(a) = 0}$$

On sait que l'unique solution de $f(x) = 0$ est $x_0 = 1$, donc on a nécessairement $\boxed{a = 1 \text{ et } b = \frac{1}{a} = 1}$
Réciproquement, il est clair que $(1, 1)$ est solution de $e^b - be^a = e^a - ae^b = 0$.

19. Calculer les réels : $r = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(1,1)$, $\quad s = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(1,1)$, $\quad t = \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(1,1)$

En dérivant une fois de plus, on trouve : $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = -ye^x$, $\quad \dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) = e^y - e^x$, $\quad \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = xe^y$,

d'où pour $x = 1$ et $y = 1$: $\boxed{r = -e, \quad s = 0, \quad t = e}$

20. Quel est le signe de $rt - s^2$?

Calculons : $rt - s^2 = -e \cdot e - 0^2 = -e^2$. Or $e \neq 0$, donc $\boxed{rt - s^2 < 0}$

3 Troisième exercice (d'après ECRICOME 2005, voie E)

On effectue une suite de lancers d'une pièce de monnaie. On suppose que les résultats des lancers sont indépendants et qu'à chaque lancer, la pièce donne pile avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ et face avec la probabilité $q = 1 - p$.
On s'intéresse dans cet exercice à l'apparition de deux piles consécutifs.
Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'évènement :

« deux piles consécutifs sont réalisés pour la première fois aux lancers numéro n et $n+1$. »

On définit alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des probabilités des évènements A_n par :

- pour tout entier naturel n non nul, $a_n = \mathbb{P}(A_n)$
- avec la convention $a_0 = 0$

3.1 Encadrement des racines de l'équation caractéristique

On considère la fonction polynomiale f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = x^2 - q\,x - p\,q$$

21. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 (avec $r_1 < r_2$).
Exprimer $r_1 + r_2$, $r_1 r_2$ en fonction de p et q.

Il s'agit d'une équation du second degré de discriminant $\Delta = (-q)^2 - 4(-pq) = q^2 + 4pq > 0$ car p et q sont strictement positifs. Elle admet donc deux racines réelles distinctes :

$$r_1 = \frac{q - \sqrt{\Delta}}{2}, \qquad r_2 = \frac{q + \sqrt{\Delta}}{2}.$$

Les relations coefficients-racines permettent d'affirmer directement (un calcul conviendrait aussi) que :

$$\boxed{r_1 + r_2 = q} \quad \text{et} \quad \boxed{r_1 r_2 = -pq}$$

22. Calculer $f(1), f(-1), f(0)$.

En utilisant les relations $p = 1 - q$ et $q = 1 - p$, on obtient :

- $f(1) = 1 - q - pq = p - pq = p(1-q) = \boxed{p^2}$
- $f(-1) = 1 + q - pq = 1 + q(1-p) = \boxed{1 + q^2}$
- $f(0) = 0 + 0 - pq = \boxed{-pq}$

23. En déduire l'encadrement suivant : $|r_1| < |r_2| < 1$

Puisque r_1 et r_2 sont les racines de la fonction polynomiale f de degré 2, qui est de terme dominant $x \mapsto x^2$ pour $x \to +\infty$, le tableau de signes de f est :

x	$-\infty$		r_1		r_2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Or la question précédente montre que $f(-1) > 0$, $f(0) < 0$ et $f(1) > 0$, donc on en déduit que :

$$-1 < r_1 < 0 < r_2 < 1.$$

En particulier :

- $0 < r_2 < 1$ donc $|r_2| = r_2$ et donc $\boxed{|r_2| < 1}$
- $r_1 < 0$ donc $|r_1| = -r_1$ et donc $|r_2| - |r_1| = r_2 + r_1 = q > 0$, d'où $\boxed{|r_1| < |r_2|}$

3.2 Équivalent de a_n quand n tend vers l'infini

24. Déterminer a_1, a_2 et a_3 en fonction de p et q.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, notons P_k l'évènement « obtenir pile au lancer numéro k ». Les évènements $(P_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendants d'après l'énoncé et ils ont tous la même probabilité p (schéma de Bernoulli).

- L'évènement A_1 se réalise si et seulement si les deux premiers lancers donnent pile, c'est-à-dire que $A_1 = P_1 \cap P_2$. Par *indépendance* de P_1 et P_2, on a donc :

$$\boxed{a_1 = \mathbb{P}(P_1 \cap P_2) = \mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}(P_2) = p^2}$$

- L'évènement A_2 se réalise si et seulement si les lancers 2 et 3 donnent pile *et* que le premier lancer donne face, c'est-à-dire $A_2 = \overline{P_1} \cap P_2 \cap P_3$. Par *indépendance*,

$$\boxed{a_2 = \mathbb{P}(\overline{P_1} \cap P_2 \cap P_2) = \mathbb{P}(\overline{P}_1)\mathbb{P}(P_2)\mathbb{P}(P_3) = qp^2}$$

- L'évènement A_3 se réalise si et seulement si les lancers 3 et 4 donnent pile *et* que le lancer 2 donne face, les deux résultats étant possibles pour le lancer 1. Ainsi $A_3 = \overline{P_2} \cap P_3 \cap P_4$, et on en déduit à nouveau par *indépendance* que

$$\boxed{a_3 = qp^2}$$

25. L'évènement A_{n+2} est réalisé si et seulement si :

- on a obtenu pile au premier tirage, face au deuxième tirage, et à partir de ce moment, A_n est réalisé ;
- ou on a obtenu face au premier tirage, et à partir de ce moment, A_{n+1} est réalisé.

À l'aide de cette remarque, montrer que l'on a, pour tout entier naturel n,

$$a_{n+2} - q\,a_{n+1} - p\,q\,a_n = 0$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Avec les notations de la question précédente, les évènements $P_1 \cap \overline{P_2} \cap A_{n+2}$ et $\overline{P_1} \cap A_{n+2}$ sont *incompatibles* et la remarque montre que leur *réunion* est égale à A_{n+2}. On en déduit que :

$$a_{n+2} = \mathbb{P}(A_{n+2}) = \mathbb{P}(P_1 \cap \overline{P_2} \cap A_{n+2}) + \mathbb{P}(\overline{P_1} \cap A_{n+2})$$

Toujours d'après la remarque, $\mathbb{P}_{P_1\cap\overline{P_2}}(A_{n+2}) = \mathbb{P}(A_n) = a_n$ et $\mathbb{P}_{\overline{P_1}}(A_{n+2}) = \mathbb{P}(A_{n+1}) = a_{n+1}$. La *formule des probabilités composées* et l'indépendance (de P_1 et P_2) conduisent donc à :

$$a_{n+2} = \mathbb{P}(P_1 \cap \overline{P_2})\mathbb{P}_{P_1\cap\overline{P_2}}(A_{n+2}) + \mathbb{P}(\overline{P}_1)\mathbb{P}_{\overline{P}_1}(A_{n+2}) = pq\,a_n + q\,a_{n+1},$$

ce qui correspond bien à l'égalité demandée.

26. Écrire un programme, en langage *Scilab*, permettant de calculer a_n, l'entier n, les réels p et q étant donnés par l'utilisateur.

On va calculer $a_3, a_4, \dots, a_n$ de proche en proche en partant de $a_1 = p^2$ et $a_2 = qp^2$, à l'aide de la relation de récurrence établie à la question précédente. On stocke les valeurs de $(a_1, \dots, a_n)$ sous forme d'une matrice ligne dans une variable `a`.

```
// Dialogue avec l'utilisateur
n = input("Entrer n : ")
p = input("Entrer p : ")
q = input("Entrer q : ")

if n == 1 then
  disp(p^2)
elseif n == 2 then
  disp(q*p^2)
else
  // Initialisation de a
```

```
  a = zeros(1,n)
  a(1) = p^2
  a(2) = q*p^2

  // Calcul par récurrence
  for k in 1:(n-2)
    a(k+2) = q*a(k+1) + p*q*a(k)
  end

  // Affichage
  disp(a(n))
end
```

27. Montrer que pour tout entier, naturel n, $\quad a_n = \dfrac{p^2}{r_2 - r_1}\left[r_2^n - r_1^n\right]$

La suite (a_n) vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 dont l'équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2. On sait donc qu'il existe deux réels λ, μ tels que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \lambda\,(r_1)^n + \mu\,(r_2)^n.}$$

Déterminons λ et μ à l'aide de $a_1 = p^2$ et $a_2 = qp^2$, en utilisant la méthode de Gauss :

$$\left\{\begin{array}{lcl} r_1\lambda & + & r_2\mu = p^2 \\ r_1^2\lambda & + & r_2^2\mu = qp^2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcr} r_1\lambda & + & r_2\mu = p^2 \\ & & r_2(r_2-r_1)\mu = p^2(q-r_1) \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{lr} r_1(r_2-r_1)\lambda & = p^2(r_2-r_1-q+r_1) \\ & r_2(r_2-r_1)\mu = p^2(q-r_1) \end{array}\right.$$

Or $r_1 + r_2 = q$, donc $q - r_1 = r_2$ et on obtient finalement après simplifications :

$$\boxed{\lambda = -\frac{p^2}{r_2 - r_1}, \qquad \mu = \frac{p^2}{r_2 - r_1}.}$$

28. En déduire que : $\quad a_n = \dfrac{p^2\, r_2^n}{r_2 - r_1}\left[1 - \left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^n\right]$

Il suffit de factoriser : $r_2^n - r_1^n = r_2^n\left(1 - \dfrac{r_1^n}{r_2^n}\right) = r_2^n\left(1 - \left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^n\right)$.

29. En déduire enfin deux réels R et C strictement positifs tels que : $\dfrac{a_n}{R^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} C$.

Remarquons que $\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ car $\left|\dfrac{r_1}{r_2}\right| = \dfrac{|r_1|}{|r_2|} < 1$ d'après l'inégalité $|r_1| < |r_2|$ établie plus haut.

Avec $R = r_2$, on en déduit par opérations sur les limites que : $\dfrac{a_n}{R^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{p^2}{r_2 - r_1}$
En rappelant les expressions de r_1 et r_2, on obtient finalement le résultat voulu avec

$$\boxed{R = \frac{q + \sqrt{q^2 + 4pq}}{2}, \qquad C = \frac{p^2}{\sqrt{q^2 + 4pq}}}$$

3.3 Expression de a_n en fonction de n par une méthode matricielle

Avertissement : La correction de cette partie de l'exercice a été rédigée par Mme Laqueille (E1B). Ne soyez pas étonnés si les notations diffèrent légèrement de celles auxquelles vous êtes habitués.

On définit les matrices A et P par :

$$A = \begin{pmatrix} r_1 + r_2 & -r_1 r_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ainsi que les matrices colonnes X_n par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

30. Vérifier que pour tout entier naturel n : $\quad X_{n+1} = A\,X_n$
et en déduire que : $\quad X_n = A^n\,X_0$

Par définition, on peut écrire pour tout entier n :

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q\,a_{n+1} + p\,q\,a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & p\,q \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

Par ailleurs, d'après la question 1, $r_1 + r_2 = q$ et $-r_1 r_2 = p\,q$. Ainsi, on retrouve bien le résultat annoncé :

$$X_{n+1} = A\,X_n$$

Par récurrence immédiate (à rédiger !) sur n, on en déduit que

$$X_n = A^n\,X_0$$

31. Les matrices $A - r_1 I$ et $A - r_2 I$ sont-elles inversibles ? (I désigne la matrice carrée unité d'ordre 2).

Cette question ne doit poser de problème à personne ! Il s'agit de matrices de taille 2×2, donc d'après le cours, on calcule le déterminant de ces matrices pour tester leur inversibilité :

• D'une part, $A - r_1 I = \begin{pmatrix} r_2 & -r_1 r_2 \\ 1 & -r_1 \end{pmatrix}$ Donc $\det\Big(A - r_1 I\Big) = -r_2 r_1 + r_2 r_1 = 0$.

Ceci signifie exactement que $\boxed{\text{la matrice } A - r_1 I \text{ n'est pas inversible.}}$

• D'une part, $A - r_2 I = \begin{pmatrix} r_1 & -r_1 r_2 \\ 1 & -r_2 \end{pmatrix}$

À nouveau, le calcul du déterminant montre que la matrice $\boxed{A - r_2 I \text{ n'est pas inversible.}}$

32. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.

La matrice P est une matrice de taille 2×2, donc d'après le cours, on calcule le déterminant de cette matrice pour tester son inversibilité. On trouve : $\det(P) = r_1 - r_2 < 0$ et d'après la question 1. En particulier, $\det(P) = r_1 - r_2 \neq 0$ donc P est inversible et son inverse est donnée par la formule (d'après le cours) :

$$P^{-1} = \frac{1}{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & -r_2 \\ -1 & r_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} -1 & r_2 \\ 1 & -r_1 \end{pmatrix}$$

33. Calculer la matrice $D = P^{-1} A\,P$. Les coefficients de la matrice D seront exprimés en fonction de r_2 et r_1 seulement.

Après calculs du produit de trois matrices, on a $D = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}$

34. Démontrer par récurrence, que pour tout entier naturel n : $\quad A^n = P\,D^n\,P^{-1}$

De la relation $D = P^{-1} A\, P$, on tire la relation $A = P\, D\, P^{-1}$ et on prouve la relation demandée par récurrence sur n en posant $\mathcal{P}_n$ l'assertion : $A^n = P\, D^n P^{-1}$.

— **Initialisation** à $n = 0$: D'une part, $A^0 = I$ par convention et d'autre part $P\, D^0 P^{-1} = P\, P^{-1} = I$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

— **Hérédité** : Soit $n \geq 0$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
Par définition, $A^{n+1} = A\, A^n$.
D'où par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A\, P\, D^n P^{-1} \\ &= P\, D\, P^{-1}\, P\, D^n P^{-1} \\ &= PD\, D^n P^{-1} \\ &= PD\, D^{n+1} P^{-1} \end{aligned}$$

— **Conclusion** : l'assertion $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier n.

35. En déduire que pour tout entier naturel n : $\quad X_n = P\, D^n P^{-1} X_0$

En multipliant la relation précédente à droite par le vecteur colonne X_0, on obtient alors pour tout entier naturel n : $A^n\, X_0 = P\, D^n P^{-1}\, X_0$, ce qui signifie exactement, d'après la question 1 de la partie 3 :

$$X_n = P\, D^n P^{-1} X_0$$

36. Retrouver ainsi l'expression de a_n en fonction de r_2, r_1, p et n.

Comme $D = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale, on a d'après le cours : $D^n = \begin{pmatrix} r_1^n & 0 \\ 0 & r_2^n \end{pmatrix}$. Par ailleurs, le vecteur colonne X_0 vérifie : $X_0 = \begin{pmatrix} p^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ce qui conduit au calcul matriciel suivant :

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{1}{r_2 - r_1} PD^n \begin{pmatrix} -1 & r_2 \\ 1 & -r_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{r_2 - r_1} P \begin{pmatrix} r_1^n & 0 \\ 0 & r_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -p^2 \\ p^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -r_1^n p^2 \\ r_2^n p^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} (r_1 r_2^n - r_2 r_1^n)\, p^2 \\ (r_2^n - r_1^n)\, p^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En considérant la seconde composante de l'égalité vectorielle ci-dessus, on obtient l'expression de $a_n = \dfrac{p^2}{r_2 - r_1} [r_2^n - r_1^n]$ (ce qui est bien le résultat trouvé précédemment)