Correction du concours blanc n^{o} 1

Option Économique

MATHÉMATIQUES

Mercredi 13 décembre 2017, de 8h à 12h.

Exercice 1

1. Résoudre l'équation $|2x-1|-|6-7x|=3$ d'inconnue x dans $\mathbb{R}$.

On étudie les tableaux de signes de chaque expression qui apparaissent à l'intérieur des valeurs absolues, puis on regarde l'expression de la somme de ces valeurs absolues selon l'intervalle où se situe x. Notons $h(x)=|2x-1|-|6-7x|$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{6}{7}$		$+\infty$
Signe de $2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
Valeur de $\lvert 2x+1\rvert$		$-2x-1$	0	$2x+1$		$2x+1$	
Signe de $6-7x$		$+$		$+$	0	$-$	
Valeur de $\lvert 6-7x\rvert$		$6-7x$		$6-7x$	0	$7x-6$	
Valeur de $h(x)$		$-9x+5$		$-5x+7$		$9x-5$	

- Si $x\in]-\infty,-\frac{1}{2}]$, on a : $\quad h(x)=3 \Leftrightarrow -9x+5=3 \Leftrightarrow -9x=-2 \Leftrightarrow x=\frac{2}{9}$

  Or $\frac{2}{9}\notin]-\infty,-\frac{1}{2}]$.

  On en déduit que l'ensemble solution de l'équation $h(x)=3$ sur $]-\infty,-\frac{1}{2}]$ est l'ensemble vide.

- Si $x\in]-\frac{1}{2},\frac{6}{7}]$, on a : $\quad h(x)=3 \Leftrightarrow -5x+7=3 \Leftrightarrow -5x=-4 \Leftrightarrow x=\frac{4}{5}$

  Or $\frac{4}{5}\in]-\frac{1}{2},\frac{6}{7}]$.

  On en déduit que l'ensemble solution de l'équation $h(x)=3$ sur $]-\frac{1}{2};\frac{6}{7}]$ est l'ensemble $\left\{\frac{4}{5}\right\}$.

- Si $x \in]\frac{6}{7}, +\infty[$, on a : $\quad h(x) = 3 \;\Leftrightarrow\; 9x - 5 = 3 \;\Leftrightarrow\; 9x = 8 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{8}{9}$

  Or $\frac{8}{9} \in]\frac{6}{7}; +\infty[$.

  On en déduit que l'ensemble solution de l'équation $h(x) = 3$ sur $]\frac{6}{7}; +\infty]$ est l'ensemble $\left\{\frac{8}{9}\right\}$.

Conclusion : l'équation $h(x) = 3$ admet $\left\{\frac{4}{5}; \frac{8}{9}\right\}$ comme ensemble solution.

2. Soit n un entier naturel. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{(-3)^k}$.

On remarque que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\frac{1}{(-3)^k} = \left(\frac{-1}{3}\right)^k$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{(-3)^k} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{-1}{3}\right)^k \\
&= \left(1 - \frac{1}{3}\right)^n, \qquad \text{(d'après la formule du binôme de Newton)} \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^n
\end{aligned}$$

3. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)^2 + 3n + 1}{\ln(n) + 5}$.

En factorisant par les termes de plus haut poids au numérateur et dénominateur, on trouve :

$$\frac{\ln(n)^2 + 3n + 1}{\ln(n) + 5} = \frac{3n}{\ln(n)} \times \frac{\left(1 + \frac{\ln(n)^2 + 1}{3n}\right)}{\left(1 + \frac{5}{\ln(n)}\right)}$$

Or, en utilisant les théorèmes de croissances comparées, on trouve que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{\ln(n)^2 + 1}{3n}\right) = 1$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{5}{\ln(n)}\right) = 1$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{3n}{\ln(n)} = +\infty$. Par quotient et produit de limites, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)^2 + 3n + 1}{\ln(n) + 5} = +\infty.$$

4. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme défini par $P(X) = 2X^3 - 5X^2 - 4X + 3$.

   (a) Trouver une racine évidente de P.

   On observe que $P(-1) = 2 \times (-1)^3 - 5 \times (1)^2 - 4 \times (-1) + 3 = -2 - 5 + 4 + 3 = 0$. Donc -1 est racine évidente de P.

   (b) En déduire une factorisation complète de P.

   On sait que -1 est racine de P. Ainsi, d'après le théorème de factorisation des polynômes à coefficients réels, on sait qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = (X + 1) \times Q(X)$. Pour trouver Q, on effectue la division euclidienne de P par $(X + 1)$ et on obtient que $Q(X) = 2X^2 - 7X + 3$.

On étudie maintenant le polynôme $Q(X) = 2X^2 - 7X + 3$. On calcule le discriminant de ce trinôme et on trouve $\Delta = (-7)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 49 - 24 = 25$. Ainsi $\sqrt{\Delta} = 5$. Le polynôme Q admet donc deux racines réelles distinctes qui sont $x_1 = \dfrac{7+5}{4} = 3$ et $x_2 = \dfrac{7-5}{4} = \dfrac{1}{2}$. On en déduit que $Q(X) = 2 \times (X-3)(X - \dfrac{1}{2}) = (X-3)(2X-1)$. Finalement on peut conclure qu'une factorisation complète de P est :

$$P(X) = (X+1)(X-3)(2X-1).$$

(c) Résoudre l'équation $2e^{3x} - 5e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$.

Posons $X = e^x$. L'équation proposée par l'énoncé se réécrit $2X^3 - 5X^2 - 4X + 3 = 0$, c'est à dire $P(X) = 0$. Or on a montré à la question précédente que les racines de P sont -1, $\dfrac{1}{2}$ et 3. Ainsi x est solution de l'équation $2e^{3x} - 5e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$ si et seulement si $e^x = -1$ ou $e^x = \dfrac{1}{2}$ ou $e^x = 3$. L'équation $e^x = -1$ n'a pas de solution car $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On en déduit que l'ensemble solution de l'équation $2e^{3x} - 5e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$ est $S = \{\ln\left(\dfrac{1}{2}\right); \ln(3)\} = \{-\ln(2); \ln(3)\}$.

5. (a) Écrire une *fonction* Scilab nommée `SommeGeo`, avec deux arguments d'entrée `q` et `n`, telle que : pour tous $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}$, l'appel `SommeGeo`(q, n) retourne en sortie la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$.

```
function y = SommeGeo(q,n)
  y = (1 - q^(n+1))/(1-q)
endfunction
```

(b) Écrire un *programme* Scilab utilisant la fonction `SommeGeo` et qui, lorsqu'il est éxécuté :

- *demande* à l'utilisateur d'entrer au clavier un entier $a \geqslant 2$, et le stocke dans une variable `a` ;
- calcule $\displaystyle\sum_{k=0}^{a} a^k$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{2a} a^k$ à l'aide de `SommeGeo`, et stocke ces valeurs dans deux variables `S1` et `S2` ;
- en *déduit* la valeur de $S = \displaystyle\sum_{k=a+1}^{2a} a^k$, et la stocke dans une variable `S` ;
- *affiche* dans la console le message « `Le résultat est :` S », où S est remplacé par sa valeur.

```
a = input("Entrer un entier a > 1 : ")
S1 = SommeGeo(a,a)
S2 = SommeGeo(a,2*a)
S = S2 - S1
disp("Résultat : " + string(S))
```

Exercice 2 (d'après Ecricome 2013, voie T)

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = 2x + \frac{3\ln(x)}{x^2}\ ;$$
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x) = 2x^3 - 6\ln(x) + 3.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.

6. *Étude du signe de g.*

   (a) Calculer $g'(x)$ lorsque $x \in \mathbb{R}_+^*$.

   - La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par combinaison linéaire de fonctions dérivables.
   - Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors : $g'(x) = 6x^2 - \dfrac{6}{x} = \boxed{\dfrac{6(x^3-1)}{x}.}$

   (b) Montrer que l'équation $g'(x) = 0$ admet une unique solution p que l'on précisera et construire le tableau de variations de g.

   Remarque : le théorème de la bijection est peu utile dans cette situation car on cherche à résoudre explicitement l'équation.

   Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $g'(x) = 0 \iff x^3 - 1 = 0 \iff x^3 = 1 \iff x = 1$ car la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante. L'unique solution de cette équation est donc $\boxed{p = 1.}$

   Puisque $x > 0$, $g'(x)$ est du même que $x^3 - 1$. On en déduit par croissance le tableau de signes de g', puis les tableau des variations de la fonction g sur $\mathbb{R}_+^*$:

x	0		1		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de g		$\searrow$		$\nearrow$	

   (c) Calculer $g(p)$ puis donner le signe de $g(x)$ lorsque $x \in \mathbb{R}_+^*$.

   D'après ce qui précède, $g(p) = g(1) = 2 - 6\ln(1) + 3 = 2 - 0 + 3$, d'où $\boxed{g(p) = 5.}$

   Le tableau des variations montre par ailleurs que $g(p)$ est un minimum de g sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$. Puisque $5 > 0$, on en déduit que : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x) > 0.}$

7. *Étude asymptotique de f.*

   (a) Déterminer les limites de $f(n)$ et $f\left(\frac{1}{n}\right)$ quand $n \to +\infty$.

   Lorsque $n \to +\infty$, on sait que $2n \to +\infty$ et de plus $\dfrac{\ln(n)}{n^2} \to 0$ d'après le théorème des croissances comparées. Par opérations sur les limites, on en déduit que : $\boxed{f(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.}$

   De plus $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{2}{n} + \dfrac{3\ln\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \dfrac{2}{n} - 3n^2\ln(n)$, avec $\dfrac{2}{n} \to 0$ (quotient) et $n^2\ln(n) \to +\infty$ (produit).

Par opérations sur les limites, on en déduit que : $\boxed{f\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty.}$

(b) On note $a = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{n}$ et $b = \lim\limits_{n\to\infty} (f(n) - a\,n)$. Calculer a et b.

Par croissances comparées et somme de limites : $\dfrac{f(n)}{n} = 2 + \dfrac{3\ln(n)}{n^3} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2+0$ donc $\boxed{a = 2.}$

De plus, on a déjà vu que : $f(n) - an = \dfrac{3\ln(n)}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, donc $\boxed{b = 0.}$

(c) Déterminer le signe de $f(x) - (ax+b)$ selon la valeur de $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Commençons remarquer que $f(x) - (2x+0) = \dfrac{3\ln(x)}{x^2}$. Or $x^2 > 0$, donc cette expression est de même signe que $\ln(x)$. Or ln croît strictement sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\ln(1) = 0$, donc on obtient :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f(x) - (ax+b)$		$-$	0	$+$	

8. *Représentation graphique de f.*

(a) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$.

- La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par somme et quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions dérivables.
- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. En notant $u : x \mapsto \ln(x)$ et $v : x \mapsto x^2$, on a $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v'(x) = 2x$ d'où :

$$f'(x) = 2+3\,\frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = 2+3\,\frac{x - 2\ln(x)x}{x^4} = 2+3\,\frac{1-2\ln(x)}{x^3} = \frac{2x^3 + 3(1-2\ln(x))}{x^3}$$

En développant le numérateur, on retrouve bien $\boxed{f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}.}$

(b) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$ en indiquant dans celui-ci les limites de f en 0 et en $+\infty$.

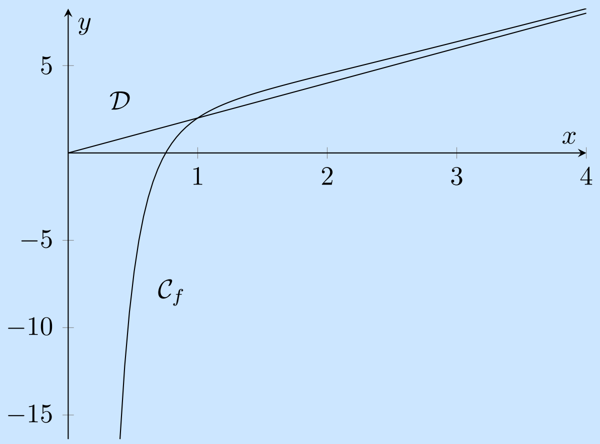
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. D'après la question précédente, $f'(x)$ est du même signe que $g(x)$ car $x^3 > 0$. Or on a vu à la question **??** que $g(x) > 0$, donc $f'(x) > 0$. Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$.

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(\frac{1}{n}) = -\infty$ d'après la question **??**, d'où le tableau :

	0	$+\infty$
Variations de f	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

(c) Tracer dans un même repère la courbe $\mathcal{C}_f$ ainsi que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = ax+b$.

Remarque : la droite $\mathcal{D}$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$. Attention aux positions de ces deux courbes, qui doivent tenir compte du signe de $f(x) - (ax+b)$.



9. *Étude d'une équation.* Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel et soit $(\mathcal{E}_n)$ l'équation : $f(x) = 2n$.

(a) Prouver que l'équation $(\mathcal{E}_n)$ admet une unique solution *(que l'on ne cherchera pas à calculer).*

On note x_n cette solution.

La fonction f est :

- strictement croissante sur $]0, +\infty[$ comme on l'a vu au (b),
- continue sur $]0, +\infty[$ (admis par l'énoncé).

D'après le théorème de la bijection, la fonction f est donc bijective de $]0, +\infty[$ vers $f(]0, +\infty[)$ et, en tenant compte des limites en 0 et $+\infty$, on a de plus : $\boxed{f(]0, +\infty[) =]-\infty, +\infty[.}$

Ainsi $2n \in f(]0, +\infty[)$ et, puisque f est une bijection, il existe donc un unique réel $x \in]0, +\infty[$ tel que $f(x) = 2n$. Il s'agit du réel $x_n = f^{-1}(2n)$.

(b) Calculer puis classer par ordre croissant les réels $f(x_n)$, $f(1)$ et $f(n)$.

En déduire l'encadrement : $\forall n \geqslant 1, \quad 1 \leqslant x_n \leqslant n$.

Soit $n \geqslant 1$. On calcule $f(1) = 2 + 0 = 2$ et $f(n) = 2n + \dfrac{3\ln(n)}{n^2}$. De plus $f(x_n) = 2n$ par définition. Puisque $n \geqslant 1$ et $\ln(n) \geqslant 0$, on obtient donc :

$$\boxed{f(1) \leqslant f(x_n) \leqslant f(n).}$$

La bijection réciproque f^{-1} est de même monotonie que f, donc strictement croissante.

Ainsi $f^{-1}(f(1)) \leqslant f^{-1}(f(x_n)) \leqslant f^{-1}(f(n))$, c'est-à-dire : $\boxed{1 \leqslant x_n \leqslant n.}$

(c) Justifier que : $\forall n \geqslant 1, \quad 1 - \dfrac{x_n}{n} = \dfrac{3\ln(x_n)}{2n\,(x_n)^2}$.

Soit $n \geqslant 1$. Par définition de x_n :

$$2n = f(x_n) = 2x_n + \frac{3\ln(x_n)}{(x_n)^2}, \qquad \text{d'où :} \quad \frac{3\ln(x_n)}{2n\,(x_n)^2} = \frac{2n - 2x_n}{2n} = 1 - \frac{x_n}{n}.$$

(d) Prouver que : $\forall n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \dfrac{\ln(x_n)}{n\,(x_n)^2} \leqslant \dfrac{\ln(n)}{n}$.

Soit $n \geqslant 1$. Puisque $x_n \geqslant 1$, on sait que $\ln(x_n) \geqslant 0$ et donc : $\boxed{\dfrac{\ln(x_n)}{n\,(x_n)^2} \geqslant 0.}$

De plus $x_n \leqslant n$ donc $\ln(x_n) \leqslant \ln(n)$ par croissance de ln. Ainsi : $\boxed{\dfrac{\ln(x_n)}{n\,(x_n)^2} \leqslant \dfrac{\ln(n)}{n\,(x_n)^2} \leqslant \dfrac{\ln(n)}{n}.}$

(e) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{n}$.

Le théorème des croissances comparées montre que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$.

D'après le théorème d'encadrement (dit « des gendarmes »), les inégalités de la question précédente conduisent alors à : $\boxed{\dfrac{\ln(x_n)}{n\,(x_n)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.}$

Par opérations sur les limites, on en déduit enfin :

$$\frac{x_n}{n} = 1 - \frac{3\ln(x_n)}{2n\,(x_n)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 - 0, \qquad \text{c'est-à-dire : } \boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n} = 1.}$$

10. *Calcul numérique.* Voici un extrait de session Scilab en console :

```
-->x = 1:5 ; 2*x + 3*log(x)./x.^2
 ans  =

    2.     4.5198604     6.3662041     8.2599302     10.193133
```

En déduire un encadrement de la solution de $(\mathcal{E}_4)$ entre deux entiers consécutifs.

Par définition, on sait que $x_4 = f^{-1}(2 \times 4) = f^{-1}(8)$.

Les cinq nombres renvoyés par Scilab sont des valeurs approchées de $f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)$. On en déduit l'encadrement $f(3) \leqslant 8 \leqslant f(4)$. Par croissance de f^{-1}, on obtient donc :

$$f^{-1}(f(3)) \leqslant f^{-1}(8) \leqslant f^{-1}(f(4)), \qquad \text{c'est-à-dire : } \boxed{3 \leqslant x_4 \leqslant 4.}$$

Remarque : on savait déjà que $1 \leqslant x_4 \leqslant 4$.

Exercice 3 (d'après EDHEC 2003, voie E)

11. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $\dfrac{e^x - 1}{x} > 0$.

La fonction $x \mapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et on a $e^0 = 1$. On en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$e^x - 1$		$-$	0	$+$	
x		$-$	0	$+$	
$\dfrac{e^x - 1}{x}$		$+$	‖	$+$	

Ce tableau de signes montre bien que $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

(b) Quel sera le résultat l'évaluation de la ligne suivante dans la console Scilab ?

```
-->test = ((exp(log(0.5))-1)/log(0.5) > 0)
```

Scilab évalue la comparaison (vraie d'après la question précédente) et stocke le résultat dans `test`*.*

```
-->test = ((exp(log(0.5))-1)/log(0.5) > 0)
 test  =
   T
```

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On admettra que f est continue sur $\mathbb{R}$: pour toute suite (x_n) convergente, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)$.

12. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

Considérons la fonction u : $\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x - 1}{x} \end{array}\right.$.

La fonction u est bien définie sur $\mathbb{R}^*$ et elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ avec dénominateur qui ne s'annule pas. On calcule en outre que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$u'(x) = \frac{e^x \times x - (e^x - 1) \times 1}{x^2} = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}.$$

De plus, on a montré à la question 1 que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $u(x) > 0$. La fonction u étant dérivable sur $\mathbb{R}^*$, on peut déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{\left(\dfrac{xe^x - e^x + 1}{x^2}\right)}{\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)} = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2 \times u(x)} = \frac{xe^x - e^x + 1}{x(e^x - 1)}.$$

On admettra que f est également dérivable en 0 et que $f'(0) = \frac{1}{2}$.

13. (a) Étudier les variations de la fonction g définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = xe^x - e^x + 1$.

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de produits de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. On trouve que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g'(x) = 1 \times e^x + x \times e^x - e^x = xe^x$. Or la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, ainsi la dérivée de g est du signe de x. On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x) = xe^x$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$g(0) = 0$	$\nearrow$	

(b) En déduire le signe de g, puis dresser le tableau de variations de f.

Le tableau de variations de g montre que g admet un minimum en 0 et qui vaut 0. De plus, g est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et strictement croissante sur $]0; +\infty[$. On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $g(x) > 0$. On remarque en outre grâce à la question 2 que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2\, u(x)}.$$

On a vu en question 1 que $u(x) > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. D'où on trouve $x^2 u(x) > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. De plus, on vient de voir que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $g(x) > 0$. On peut donc affirmer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $f'(x) > 0$. L'énoncé nous propose d'admettre que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = \frac{1}{2}$. On peut donc conclure que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) > 0$. On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2 u(x)}$		$+$	$\frac{1}{2}$	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(0) = 0$	$\nearrow$	

On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

14. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 0$.

On procède par récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $\mathcal{P}(n)$: « $u_n > 0$ ».

- **Initialisation :** La propriété $\mathcal{P}(0)$ est manifestement vraie car $u_0 > 0$ d'après l'énoncé de la question.
- **Hérédité :** Soit $n \geqslant 0$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Démontrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On sait que $u_{n+1} = f(u_n)$. Or $u_n > 0$. De plus, le tableau de variations de la question 3-b nous permet d'affirmer que pour tout $x > 0$, on a $f(x) > 0$. On en déduit que $f(u_n) > 0$ et donc que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion :** Par principe de récurrence, on conclut que pour tout $n \geqslant 0$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie. C'est à dire que pour tout $n \geqslant 0$, on $u_n > 0$.

15. (a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) - x = f(-x)$.

Si $x = 0$, l'assertion à démontrer est évidente car $f(0) = 0$ par définition. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a :

$$\begin{aligned} f(x) - x - f(-x) &= \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) - \ln(e^x) - \ln\left(\frac{e^{-x} - 1}{-x}\right) \\ &= \ln\left(\frac{e^x - 1}{x} \times \frac{1}{e^x} \times \frac{-x}{e^{-x} - 1}\right) \\ &= \ln\left(\frac{-x(e^x - 1)}{x(1 - e^x)}\right) = \ln(-(-1)) = \ln(1) = 0. \end{aligned}$$

(b) En déduire le signe de $f(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

On vient de démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $f(x) - x = f(-x)$. Le tableau de variations de la question 3-b nous apprend que pour tout $y < 0$, on a $f(y) < 0$. On en déduit que la fonction $x \mapsto f(x) - x$ est strictement négative sur $\mathbb{R}_+^*$.

(c) En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$. Or, on a démontré à la question 4 que $u_n > 0$. De plus, a prouvé à la question 5-b que $f(x) - x < 0$ pour tout $x > 0$. On en déduit que $u_{n+1} - u_n < 0$. Ceci est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$ et montre que la suite (u_n) est (strictement) décroissante.

16. Démontrer que la suite (u_n) converge et calculer sa limite.

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. D'après le théorème de la limite monotone, elle converge. Notons ℓ sa limite. La fonction f étant continue, on a :

$$\ell = \lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n \to +\infty} u_n\right) = f(\ell),$$

donc $f(\ell) - \ell = 0$. Or $f(\ell) - \ell = f(-\ell)$ (question 5-a), on a donc $f(-\ell) = 0$. Le tableau de variations de la fonction f établi à la question 3-b nous apprend que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que $f(0) = 0$. On en déduit que l'équation $f(-\ell) = 0$ admet une unique solution qui est $\ell = 0$. La limite de la suite (u_n) est donc 0.

Exercice 4 (d'après HEC 2009, voie E)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

17. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers naturels.

On a déjà $u_1 \geqslant u_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = u_{n-1}$. À condition de prouver que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers naturels, on aura alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, ce qui montrera que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Vérifions maintenant que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers naturels, en raisonnant par récurrence (sur deux rangs consécutifs car la suite est définie par une relation de récurrence d'ordre 2).

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{A}(n)$ l'assertion « $\boxed{u_n \in \mathbb{N} \text{ et } u_{n+1} \in \mathbb{N}}$ ».
- **Initialisation.** Pour $n = 0$, il s'agit de prouver que $\boxed{u_0 \in \mathbb{N} \text{ et } u_1 \in \mathbb{N}.}$ Or on sait par définition de la suite que $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, donc l'assertion $\mathcal{A}(0)$ est bien vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{A}(n)$. Montrons $\mathcal{A}(n+1)$, c'est-à-dire : $\boxed{u_{n+2} \in \mathbb{N} \text{ et } u_{n+1} \in \mathbb{N}.}$ D'après l'hypothèse $\mathcal{A}(n)$, on sait déjà que $u_n \in \mathbb{N}$ et $u_{n+1} \in \mathbb{N}$. Une somme de deux entiers naturels est encore un entier naturel, donc $u_{n+1} + u_n \in \mathbb{N}$. Ainsi $u_{n+2} \in \mathbb{N}$ d'après la relation qui définit la suite, donc $\mathcal{A}(n+1)$ est bien vérifiée.
- **Conclusion.** D'après le principe de récurrence, on en déduit : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{A}(n).}$

  En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le terme u_n est un entier naturel.

(b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente et notons $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite. Lorsque $n \to \infty$, on a $u_n \to \ell$ et aussi $u_{n+1} \to \ell$ et $u_{n+2} \to \ell$ (par décalages d'indice). On en déduit par somme de limites que :

$$\ell = \lim_{n\to\infty} u_{n+2} = \lim_{n\to\infty} (u_{n+1} + u_n) = \ell + \ell.$$

Autrement dit, $\ell = 0$. Mais par croissance de (u_n), on sait que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geqslant u_1$, d'où $\ell \geqslant 1$ par passage à la limite dans l'inégalité large. On obtient donc une contradiction : $0 \geqslant 1$.
Ceci montre que $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ n'est pas convergente.}}$

Remarque. D'après le théorème des suites monotones, on pourrait en déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

Dans toute la suite de l'exercice, a et b ($a > b$) désignent les deux solutions de l'équation du second degré suivante : $x^2 - x - 1 = 0$.

18. (a) Montrer que : $b = 1 - a = -\dfrac{1}{a}$. Établir l'encadrement suivant : $1 < a < 2$.

Les réels a et b sont les racines du polynôme $X^2 - X - 1$ (elles existent car le discriminant vaut 5). Par factorisation, on a donc : $X^2 - X - 1 = (X - a)(X - b) = X^2 - (a + b)X + ab$. On obtient alors $\boxed{a + b = 1 \text{ et } ab = -1}$ par identification des coefficients, ce qui conduit direction aux relations de l'énoncé (notons que $1/a$ est bien défini car la relation $ab = -1$ entraîne $a \neq 0$).

Puisque $a > b$, la relation $ab = -1$ montre que $a > 0$ et $b < 0$. Ainsi $1 - b > 1 - 0$, d'où $\boxed{a > 1.}$

Mais alors $\frac{1}{a} < 1$, c'est-à-dire $b > -1$, et donc $1 - b < 2$. Ainsi $\boxed{a < 2.}$

Remarque. On aurait aussi pu raisonner à partir des formules $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

(b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(a^n - b^n)$.

Puisque $X^2 - X - 1$ admet deux racines réelles distinctes (a et b), le théorème des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 prouve l'existence de deux réels A et B tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = A\,a^n + B\,b^n$.

Les conditions initiales $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ montrent de plus que (A, B) est solution des systèmes :

$$\left\{\begin{array}{ll} A & +B = 0 \\ Aa & +Bb = 1 \end{array}\right. \underset{L_2 \leftarrow L_2 - aL_1}{\iff} \left\{\begin{array}{ll} A & +B = 0 \\ & (b-a)B = 1 \end{array}\right. \underset{\substack{b-a=-\sqrt{5} \\ L_1 \leftarrow \sqrt{5}\,L_1 + L_2}}{\iff} \left\{\begin{array}{ll} \sqrt{5}\,A & = 1 \\ & -\sqrt{5}\,B = 1 \end{array}\right.$$

Ainsi $A = \frac{1}{\sqrt{5}}$ et $B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, d'où : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(a^n - b^n).}$

(c) En déduire, selon la valeur du réel $c > 0$, la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{c^n}$.

Commençons par chercher le terme dominant de $a^n - b^n$ lorsque $n \to +\infty$. On a déjà vu que $1 < a < 2$ et, d'après la relation $b = 1 - a$, on en déduit que $-1 < b < 0$. En particulier $\left|\frac{b}{a}\right| = \frac{|b|}{|a|} < 1$.

En posant $q = \frac{b}{a}$, on a donc : $u_n = \frac{a^n}{\sqrt{5}}\,(1 - q^n)$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

Ainsi, le comportement de $\frac{u_n}{c^n} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{a}{c}\right)^n (1 - q^n)$ pour $n \to +\infty$ est déterminé par celui de $\left(\frac{a}{c}\right)^n$:

- Si $c > a$, alors $\left|\frac{a}{c}\right| = \frac{a}{c} < 1$ et donc : $\frac{u_n}{c^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
- Si $c = a$, alors $\frac{a}{c} = 1$ et donc : $\frac{u_n}{c^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{5}}$.
- Si $0 < c < a$, alors $\frac{a}{c} > 1$ et donc : $\frac{u_n}{c^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

19. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$: $\beta_n = u_{n+1} - au_n$. Exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}$, β_n en fonction de n et de b.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On utilise la forme explicite de u_n et u_{n+1} et on développe :

$$\beta_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(a^{n+1} - b^{n+1}\right) - \frac{a}{\sqrt{5}}\left(a^n - b^n\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(ab^n - b^{n+1}\right) = \frac{b^n}{\sqrt{5}}(a - b) = \boxed{b^n}$$

20. On rappelle que pour tout réel x, la partie entière de x est l'entier noté $\lfloor x \rfloor$ qui vérifie : $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.

(a) Établir, pour tout n de $\mathbb{N}$, l'égalité suivante : $\lfloor au_{2n} \rfloor = u_{2n+1} - 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, $u_{2n+1} - au_{2n} = \beta_{2n} = b^{2n}$, donc $au_{2n} = u_{2n+1} - b^{2n}$.

Or $0 < b^2 < 1$ car $b^2 = b + 1 = 2 - a$ et $1 < a < 2$. Ainsi $0 < b^{2n} \leqslant 1$. De plus :

$$\begin{aligned} 0 < b^{2n} \leqslant 1 \quad &\iff \quad 0 > -b^{2n} \geqslant -1 \\ &\iff \quad -1 \leqslant -b_{2n} < 0 \\ &\iff \quad u_{2n+1} - 1 \leqslant u_{2n+1} - b^{2n} < u_{2n+1}. \end{aligned}$$

Le nombre $N = u_{2n+1} - 1$, qui est un entier d'après la première question de l'exercice, vérifie donc l'encadrement $N \leqslant au_{2n} < N + 1$ qui caractérise la partie entière. Par unicité, on obtient donc :

$$\boxed{\lfloor au_{2n} \rfloor = u_{2n+1} - 1.}$$

(b) Exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\lfloor au_{2n-1} \rfloor$ en fonction de u_{2n}.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On peut écrire comme précédemment $au_{2n-1} = u_{2n} - b^{2n-1}$. En partant cette fois de l'encadrement $-1 < b < 0$ (qui se justifie à nouveau par le fait que $b = 1 - a$ et $1 < a < 2$), on en déduit que $-1 < b^{2n-1} < 0$ car l'entier $2n - 1$ est impair et non nul, ce qui conduit à :

$$u_{2n} < u_{2n} - b^{2n-1} < u_{2n} + 1,$$

et en particulier $u_{2n} \leqslant au_{2n-1} < u_{2n} + 1$. Puisque u_{2n} est entier, on obtient : $\boxed{\lfloor au_{2n-1} \rfloor = u_{2n}.}$

21. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{2^{k+1}}$ puis déterminer sa limite quand $n \to +\infty$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on sait que $\dfrac{1}{2^{k+1}} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2^k}$ et donc : $\dfrac{u_k}{2^{k+1}} = \dfrac{1}{2\sqrt{5}}\left(\dfrac{a}{2}\right)^k - \dfrac{1}{2\sqrt{5}}\left(\dfrac{b}{2}\right)^k$.

On en déduit par linéarité de Σ :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{2^{k+1}} &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a}{2}\right)^k - \frac{1}{2\sqrt{5}} \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{b}{2}\right)^k \\ &= \boxed{\frac{1}{2\sqrt{5}}\,\frac{a}{2}\,\frac{1-\left(\frac{a}{2}\right)^n}{1-\frac{a}{2}} - \frac{1}{2\sqrt{5}}\,\frac{b}{2}\,\frac{1-\left(\frac{b}{2}\right)^n}{1-\frac{b}{2}}}\end{aligned}$$

Puisque $1 < a < 2$ et $-1 < b < 0$, on a $\left|\dfrac{a}{2}\right| < 1$ et $\left|\dfrac{b}{2}\right| < 1$. À l'aide du théorème de convergence des suites géométriques et des opérations sur les limites, on obtient alors :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{2^{k+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{a}{2}\,\frac{1-0}{1-\frac{a}{2}} - \frac{b}{2}\,\frac{1-0}{1-\frac{b}{2}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{5}}\,\frac{2(a-b)}{(2-a)(2-b)} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}(2^2-2-1)}$$

Conclusion : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{2^{k+1}} = 1.}$

22. Soit p un entier fixé de $\mathbb{N}$. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p \frac{u_k}{2^{k+1}}$.

(a) Étudier la monotonie de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors par propriété d'additivité de Σ :

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} k^p \frac{u_k}{2^{k+1}} - \sum_{k=1}^{n} k^p \frac{u_k}{2^{k+1}} = (n+1)^p \frac{u_{n+1}}{2^{n+2}},$$

ce qui est positif car $u_{n+1} \in \mathbb{N}$. La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.

(b) Montrer l'existence d'un réel $c \in]0,2[$ tel que : $\lim\limits_{k\to+\infty} k^p \dfrac{u_k}{c^k} = 0$.

On a déjà vu que $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{u_k}{a^k} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Prenons alors c tel que $a < c < 2$, ce qui est possible car $1 < a < 2$. Cette condition entraîne $\dfrac{c}{a} > 1$ et donc, par croissances comparées : $\dfrac{k^p}{(\frac{c}{a})^k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$.

Par produit de suites convergentes, on en déduit que : $\boxed{k^p \dfrac{u_k}{c^k} = \dfrac{k^p}{(\frac{c}{a})^k} \dfrac{u_k}{a^k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.}$

(c) Établir enfin la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit $c \in]0,2[$ vérifiant la condition de la question précédente. Sachant qu'une suite convergente est bornée (et donc majorée), il existe un réel M tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad k^p \frac{u_k}{c^k} \leqslant M.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient alors la majoration :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^p \frac{u_k}{2^{k+1}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} M \frac{c^k}{2^{k+1}} = \frac{M}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{c}{2}\right)^k = \frac{M}{2} \frac{c}{2} \frac{1-\left(\frac{c}{2}\right)^n}{1-\frac{c}{2}} \leqslant \frac{M\,c}{2(2-c)}.$$

Conclusion. La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

- croissante d'après (a),
- majorée par la constante $\dfrac{Mc}{2(2-c)}$ d'après (b),

donc cette suite est convergente d'après le théorème des suites monotones.