Concours blanc n° 1

Option Économique

MATHÉMATIQUES

Mercredi 13 décembre 2017, de 8h à 12h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur dénoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Le sujet est constitué de quatre exercices indépendants.

Exercice 1

1. Résoudre l'équation $|2x-1|-|6-7x|=3$ d'inconnue x dans $\mathbb{R}$.

2. Soit n un entier naturel. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{(-3)^k}$.

3. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n)^2+3n+1}{\ln(n)+5}$.

4. Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ le polynôme défini par $P(X)=2X^3-5X^2-4X+3$.
   (a) Trouver une racine évidente de P.
   (b) En déduire une factorisation complète de P.
   (c) Résoudre l'équation $2e^{3x}-5e^{2x}-4e^x+3=0$.

5. (a) Écrire une *fonction* Scilab nommée `SommeGeo`, avec deux arguments d'entrée `q` et `n`, telle que : pour tous $q\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et $n\in\mathbb{N}$, l'appel `SommeGeo`(q,n) retourne en sortie la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}q^k$.
   (b) Écrire un *programme* Scilab utilisant la fonction `SommeGeo` et qui, lorsqu'il est éxécuté :
   - *demande* à l'utilisateur d'entrer au clavier un entier $a\geqslant 2$, et le stocke dans une variable `a` ;
   - calcule $\displaystyle\sum_{k=0}^{a}a^k$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{2a}a^k$ à l'aide de `SommeGeo`, et stocke ces valeurs dans deux variables `S1` et `S2` ;
   - en *déduit* la valeur de $S=\displaystyle\sum_{k=a+1}^{2a}a^k$, et la stocke dans une variable `S` ;
   - *affiche* dans la console le message « `Le résultat est :` S », où S est remplacé par sa valeur.

Exercice 2

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = 2x + \frac{3\ln(x)}{x^2} \ ;$$
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x) = 2x^3 - 6\ln(x) + 3.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.

6. *Étude du signe de g.*
   (a) Calculer $g'(x)$ lorsque $x \in \mathbb{R}_+^*$.
   (b) Montrer que l'équation $g'(x) = 0$ admet une unique solution p que l'on précisera et construire le tableau de variations de g.
   (c) Calculer $g(p)$ puis donner le signe de $g(x)$ lorsque $x \in \mathbb{R}_+^*$.

7. *Étude asymptotique de f.*
   (a) Déterminer les limites de $f(n)$ et $f\left(\frac{1}{n}\right)$ quand $n \to +\infty$.
   (b) On note $a = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{n}$ et $b = \lim\limits_{n\to\infty} (f(n) - a\,n)$. Calculer a et b.
   (c) Déterminer le signe de $f(x) - (ax + b)$ selon la valeur de $x \in \mathbb{R}_+^*$.

8. *Représentation graphique de f.*
   (a) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$.
   (b) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$ en indiquant dans celui-ci les limites de f en 0 et en $+\infty$.
   (c) Tracer dans un même repère la courbe $\mathcal{C}_f$ ainsi que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = ax + b$.

9. *Étude d'une équation.* Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel et soit $(\mathcal{E}_n)$ l'équation : $f(x) = 2n$.
   (a) Prouver que l'équation $(\mathcal{E}_n)$ admet une unique solution *(que l'on ne cherchera pas à calculer)*.
   On note x_n cette solution.
   (b) Calculer puis classer par ordre croissant les réels $f(x_n)$, $f(1)$ et $f(n)$.
   En déduire l'encadrement : $\forall n \geqslant 1, \quad 1 \leqslant x_n \leqslant n$.
   (c) Justifier que : $\forall n \geqslant 1, \quad 1 - \dfrac{x_n}{n} = \dfrac{3\ln(x_n)}{2n\,(x_n)^2}$.
   (d) Prouver que : $\forall n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \dfrac{\ln(x_n)}{n\,(x_n)^2} \leqslant \dfrac{\ln(n)}{n}$.
   (e) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{n}$.

10. *Calcul numérique.* Voici un extrait de session Scilab en console :

```
-->x = 1:5 ; 2*x + 3*log(x)./x.^2
 ans  =

    2.    4.5198604    6.3662041    8.2599302    10.193133
```

En déduire un encadrement de la solution de $(\mathcal{E}_4)$ entre deux entiers consécutifs.

Exercice 3

11. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $\dfrac{e^x - 1}{x} > 0$.

    (b) Quel sera le résultat l'évaluation de la ligne suivante dans la console Scilab ?

    ```
    -->test = ((exp(log(0.5))-1)/log(0.5) > 0)
    ```

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On admettra que f est continue sur $\mathbb{R}$: pour toute suite (x_n) convergente, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)$.

12. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

    On admettra que f est également dérivable en 0 et que $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.

13. (a) Étudier les variations de la fonction g définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = xe^x - e^x + 1$.

    (b) En déduire le signe de g, puis dresser le tableau de variations de f.

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

14. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 0$.

15. (a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) - x = f(-x)$.

    (b) En déduire le signe de $f(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

    (c) En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

16. Démontrer que la suite (u_n) converge et calculer sa limite.

Exercice 4

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

17. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers naturels.

    (b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

    Dans toute la suite de l'exercice, a et b ($a > b$) désignent les deux solutions de l'équation du second degré suivante : $x^2 - x - 1 = 0$.

18. (a) Montrer que : $b = 1 - a = -\dfrac{1}{a}$. Établir l'encadrement suivant : $1 < a < 2$.

    (b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(a^n - b^n)$.

    (c) En déduire, selon la valeur du réel $c > 0$, la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{c^n}$.

19. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$: $\beta_n = u_{n+1} - au_n$. Exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}$, β_n en fonction de n et de b.

20. On rappelle que pour tout réel x, la partie entière de x est l'entier noté $\lfloor x \rfloor$ qui vérifie : $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.

    (a) Établir, pour tout n de $\mathbb{N}$, l'égalité suivante : $\lfloor au_{2n} \rfloor = u_{2n+1} - 1$.

    (b) Exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\lfloor au_{2n-1} \rfloor$ en fonction de u_{2n}.

21. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{2^{k+1}}$ puis déterminer sa limite quand $n \to +\infty$.

22. Soit p un entier fixé de $\mathbb{N}$. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p \frac{u_k}{2^{k+1}}$.

    (a) Étudier la monotonie de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

    (b) Montrer l'existence d'un réel $c \in]0, 2[$ tel que : $\lim\limits_{k\to+\infty} k^p \dfrac{u_k}{c^k} = 0$.

    (c) Établir enfin la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.