Devoir surveillé n$^{\mathrm{o}}$ 2

E1A 2017-2018

Correction

Questions de cours

1. (a) Énoncer la formule du binôme de Newton.

   Pour tous a, b réels et $n \in \mathbb{N}$,

   $$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.}$$

   (b) Rappeler comment s'expriment les coefficients binomiaux en termes de factorielles.

   Pour tous $(n,k) \in \mathbb{N}^2$ tels que $k \leqslant n$, $\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.}$

   (c) Montrer que $(1-\sqrt{3})^5 + (1+\sqrt{3})^5$ est un entier et donner sa valeur.

   D'après la formule du binôme de Newton, on obtient :

   $$\begin{aligned} (1-\sqrt{3})^5 &= (\sqrt{3})^0 - 5(\sqrt{3})^1 + 10(\sqrt{3})^2 - 10(\sqrt{3})^3 + 5(\sqrt{3})^4 - (\sqrt{3})^5 \\ (1+\sqrt{3})^5 &= (\sqrt{3})^0 + 5(\sqrt{3})^1 + 10(\sqrt{3})^2 + 10(\sqrt{3})^3 + 5(\sqrt{3})^4 + (\sqrt{3})^5 \end{aligned}$$

   Les puissances impaires se simplifient dans la somme $(1-\sqrt{3})^5 + (1+\sqrt{3})^5$, tandis que les puissances paires sont doublées. Ainsi :

   $$(1-\sqrt{3})^5 + (1+\sqrt{3})^5 = 2(1 + 10 \times 3 + 5 \times 9) = \boxed{152.}$$

2. Soit (u_n) une suite de réels.

   (a) Formuler avec des quantificateurs l'assertion : « (u_n) tend vers $+\infty$ ».

   $$\boxed{\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N \implies u_n \geqslant A)}$$

   (b) Formuler avec des quantificateurs l'assertion : « (u_n) est bornée ».

   $$\boxed{\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant M}$$

3. Soient P et Q deux polynômes tels que $\deg(P) \leqslant 2017$ et $\deg(Q) \leqslant 2017$.

   (a) Que peut-on dire de $\deg(P+Q)$ et de $\deg(P \times Q)$?

   On sait d'après le cours que $\deg(P+Q) \leqslant 2017$ et que $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$.

   (b) Existe-t-il P et Q tels que $\deg(P+Q) = 11$ et $\deg(P \times Q) = 18$? Si oui, donner un exemple.

   Oui. Il suffit de prendre $P = X^{11}$ et $Q = X^7$.

(c) Existe-t-il P et Q tels que $\deg(P+Q) = 18$ et $\deg(P \times Q) = 11$? Si oui, donner un exemple.

Non. Si $\deg(P \times Q) = 11$, alors $\deg(P) \leqslant 11$ et $\deg(Q) \leqslant 11$ donc $\deg(P+Q) \leqslant 11$.

(d) Existe-t-il un polynôme dont les racines sont 18, 11 et 2017 ? Si oui, donner un exemple.

Oui. Il suffit de prendre le polynôme $(X-18)(X-11)(X-2017)$.

4. (a) Rappeler la syntaxe *en langage Scilab* pour définir une fonction nommée `f` qui possède un argument d'entrée `x` et un argument de sortie `y`.

```
function y = f(x)
  ...
  y = ...
enfunction
```

(b) Écrire en langage Scilab une fonction `sommeEtProduit` qui prend en argument deux nombres `a` et `b` et qui renvoie leur somme et leur produit en sortie.
Exemple d'utilisation en console :

```
-->[s,p] = sommeEtProduit(18,11)
 p  =
    198.
 s  =
    29.
```

```
function [s,p] = sommeEtProduit(a,b)
 s = a+b
 p = a*b
enfunction
```

Exercice 1 : calcul de sommes et produits

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier.

5. (a) Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sqrt{\frac{5^{k+4}}{3^{2k}}}$.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sqrt{5^k}\sqrt{5^4}}{\sqrt{3^{2k}}} = 5^2 \sum_{k=0}^{n} \frac{(\sqrt{5})^k}{3^k} = 25 \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^k = \boxed{25\,\frac{1-(\frac{\sqrt{5}}{3})^{n+1}}{1-\frac{\sqrt{5}}{3}}.}$$

(b) Déterminer la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Puisque $0 < \sqrt{5} < 3$, on a $|\frac{\sqrt{5}}{3}| < 1$ donc le terme $(\frac{\sqrt{5}}{3})^{n+1}$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$ d'après le théorème de convergence des suites géométriques. Par opérations sur les limites, on en déduit que (S_n) converge et :

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{25}{1-\frac{\sqrt{5}}{3}} = \boxed{\frac{75}{3-\sqrt{5}}}$$

6. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer que $\dfrac{(3k+1)(2k)!}{k!(k+1)!} = \dbinom{2k+2}{k+1} - \dbinom{2k}{k}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. On part du membre de droite en écrivant :

$$\binom{2k}{k} = \frac{(2k)!}{k!(2k-k)!} = \frac{(2k)!}{(k!)^2}, \qquad \binom{2k+2}{k+1} = \frac{(2k+2)!}{(k+1)!^2} = \frac{(2k)!(2k+1)(2k+2)}{(k+1)k!(k+1)!} = 2\frac{(2k)!(2k+1)}{k!(k+1)!}$$

Puisque $(k+1)! = (k+1)k!$, on en déduit par mise au même dénominateur que :

$$\binom{2k+2}{k+1} - \binom{2k}{k} = 2\frac{(2k)!(2k+1)}{k!(k+1)!} - \frac{(2k)!(k+1)}{(k!)^2(k+1)} = \frac{(2k)!}{k!(k+1)!}\left[2(2k+1)-(k+1)\right],$$

d'où le résultat annoncé car $2(2k+1)-(k+1) = 3k+1$.

(b) En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(3k+1)(2k)!}{k!(k+1)!}$.

En notant $u_k = \binom{2k}{k}$, on a $u_{k+1} = \binom{2k+2}{k+1}$. On fait apparaître une somme télescopique :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(3k+1)(2k)!}{k!(k+1)!} = \sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}-u_k) = u_n - u_0 = \boxed{\binom{2n}{n} - 1 = \frac{(2n)!}{(n!)^2} - 1.}$$

7. (a) Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k)$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$ puis

Par linéarité et formule du cours :

$$\sum_{k=1}^{n}(2k) = 2\sum_{k=1}^{n} k = 2\,\frac{n(n+1)}{2} = \boxed{n(n+1).}$$

De même :

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 = n(n+1) - n = \boxed{n^2.}$$

(b) Justifier sans calcul que $\displaystyle\sum_{m=1}^{2n} m = \sum_{k=1}^{n}(2k) + \sum_{k=1}^{n}(2k-1)$, puis le vérifier.

Le terme de gauche est la somme des entiers de 1 à $2n$, qu'on obtient en ajoutant la somme des entiers pairs $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k)$ et celle de entiers impairs $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$. On peut vérifier par un calcul direct :

$$\sum_{m=1}^{2n} m = \frac{2n(2n+1)}{2} = n(2n+1) = \boxed{n(n+1)+n^2.}$$

(c) Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k)$, puis en déduire que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$.

Le premier calcul ne pose pas de problème :

$$\prod_{k=1}^{n}(2k) = 2^n \prod_{k=1}^{n} k = \boxed{2^n n!}$$

On utilise maintenant la même astuce de décomposition en pairs/impairs qu'à la question précédente :

$$\prod_{k=1}^{2n} m = (2n)! \qquad \text{donc} \qquad \prod_{k=1}^{n}(2k-1) = \frac{\prod_{k=1}^{2n} m}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} = \boxed{\frac{(2n)!}{2^n n!}}$$

Exercice 2 : fonctions numériques

On considère les fonctions numériques f et g définies par :

$$f : x \mapsto \ln(2-x) + \ln(2+x), \quad \text{et} \quad g : y \mapsto 2\sqrt{1-y^y}$$

8. (a) Déterminer D_f, le domaine de définition de f.

Soit x un réel. Puisque le domaine de ln est $\mathbb{R}_+^*$, le réel $f(x)$ est bien défini si et seulement si $2-x>0$ et $2+x>0$, ce qui se traduit par l'encadrement $-2<x<2$. Ainsi $\boxed{D_f =]-2;2[.}$

(b) Étudier la parité de f.

La fonction f est $\boxed{\text{paire.}}$ En effet, $]-2;2[$ est symétrique par rapport à 0 et pour tout $x \in]-2;2[$:

$$f(-x) = \ln(2-(-x)) + \ln(2+(-x)) = \ln(2+x) + \ln(2-x) = \ln(2-x) + \ln(2+x) = f(x).$$

(c) Déterminer une fonction u telle que $f = \ln \circ u$. En déduire les variations de f.

Pour tout réel $x \in]-2;2[$,

$$f(x) = \ln(2-x) + \ln(2+x) = \ln\left((2-x)(2+x)\right) = \ln(4-x^2) = \ln(u(x)), \quad \text{avec } u(x) = 4-x^2.$$

Ainsi, f est obtenue par composition de ln (qui est strictement croissante) et du polynôme du second degré u. Or ln est strictement croissante, donc la montonie de f est donnée par celle de u :
$\boxed{\text{strictement croissante sur }]-2;0] \text{ et strictement décroissante sur } [0;+2[.}$

(d) Exprimer l'ensemble-image de f sous forme d'un intervalle.

Il s'agit de déterminer l'ensemble des $y \in \mathbb{R}$ pour lesquels l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution $x \in D_f$. Puisque la fonction est paire, on peut se limiter à $x \geqslant 0$. Remarquons que :

$$f(x) = y \iff \ln(4-x^2) = y \iff 4-x^2 = e^y \iff x^2 = 4-e^y.$$

Avant de pouvoir prendre les racines carrées, on doit distinguer deux cas.

<u>1^er cas : $4-e^y<0$.</u> L'égalité $x^2 = 4-e^y$ est alors impossible car x^2 est nécessairement positif.

<u>2^e cas : $4-e^y \geqslant 0$.</u> Alors $f(x) = y \iff \sqrt{x^2} = \sqrt{4-e^y} \iff x = \sqrt{4-e^y}$ (rappelons que $x \geqslant 0$).
De plus $e^y > 0$, donc on a bien $0 \leqslant \sqrt{4-e^y} < \sqrt{4-0} = 2$.

Conclusion. La fonction f admet pour image l'ensemble des $y \in \mathbb{R}$ tels que $4-e^y \geqslant 0$, c'est-à-dire l'ensemble des $y \in \mathbb{R}$ tels que $y \leqslant \ln(4)$. Or $\ln(4) = 2\ln(2)$ donc on obtient finalement $\boxed{]-\infty;2\ln(2)].}$

9. (a) Pour quels $y \in \mathbb{R}$ la puissance y^y est-elle bien définie ? L'exprimer sous forme exponentielle.

Par définition des puissances généralisées, $y^y = e^{y\ln(y)}$ et n'est défini que pour $y>0$.

(b) En déduire le domaine de définition de g.

Soit $y \in \mathbb{R}$. Pour que le $g(y)$ soit bien défini, il faut que :
- y^y soit bien défini, c'est-à-dire $y>0$ d'après ce qui précède :
- $1-y^y \geqslant 0$, pour que sa racine carrée soit définie. Mais pour $y>0$, on a :

$$1-y^y \geqslant 0 \iff 1 \geqslant e^{y\ln(y)} \iff 0 \geqslant y\ln(y) \iff 0 \geqslant \ln(y) \iff 1 \geqslant y.$$

Conclusion. Le domaine de définition de g est $\boxed{]0;1].}$

(c) Exprimer le domaine de définition de $f \circ g$ comme un intervalle, puis simplifier l'expression de $f \circ g$.

Soit $y \in \mathbb{R}$. Alors $f(g(y))$ est bien définie si et seulement si :

- $y \in D_g$, c'est-à-dire $0 < y \leqslant 1$;
- $g(y) \in D_f$, c'est-à-dire $-2 < g(y) < 2$.

Il s'agit donc de résoudre cette inéquation pour $0 < y \leqslant 1$: toute racine carrée étant positive,

$$-2 < 2\sqrt{1-y^y} < 2 \iff \sqrt{1-y^y} < 1 \iff 1-y^y < 1 \iff y^y > 0 \iff e^{y\ln(y)} > 0,$$

ce qui est toujours vérifié. Ainsi, $\boxed{D_{f\circ g} =]0;1].}$

De plus, pour tout y dans ce domaine,

$$f(g(y)) = \ln(4-g(y)^2) = \ln\left(4-4(1-y^y)\right) = \ln(4y^y) = \boxed{2\ln(2) + y\ln(y).}$$

(d) Exprimer le domaine de définition de $g \circ f$ comme réunion de deux intervalles.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Le réel $g(f(x))$ est bien défini si et seulement si :

- $x \in D_f$, c'est-à-dire $-2 < x < 2$;
- et $f(x) \in D_g$, c'est-à-dire $0 < \ln(4-x^2) \leqslant 1$.

Il s'agit donc de résoudre cette inéquation pour $-2 < x < 2$: par stricte croissance de l'exponentielle,

$$0 < \ln(4-x^2) \leqslant 1 \iff 1 < 4-x^2 \leqslant e \iff (x^2 < 3 \text{ et } 4-e \leqslant x^2)$$

En prenant les racines carrées, on obtient donc les conditions : $|x| < \sqrt{3}$ et $\sqrt{4-e} \leqslant |x|$. Puisque $\sqrt{4-e} < \sqrt{3} < 2$, on obtient finalement (en distinguant les cas $x \geqslant 0$ et $x \leqslant 0$) :

$$\boxed{D_{g\circ f} = \left]-\sqrt{3}; -\sqrt{4-e}\right] \cup \left[\sqrt{4-e}; \sqrt{3}\right[.}$$

Exercice 3 : suite définie par itération

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de réels telle que $x_0 = 2$ et pour tout n entier naturel, $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2} + \dfrac{1}{x_n}$.

10. Déterminer un réel $a > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad \frac{x}{2} + \frac{1}{x} = \frac{(x-a)^2}{2x} + a.$$

Cette relation sera très utile pour les questions qui suivent.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. En multipliant par $2x$, on remarque que la relation à établir est équivalente à :

$$x^2 + 2 = (x-a)^2 + 2ax, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad x^2 + 2 = x^2 - 2ax + a^2 + 2ax,$$

ou encore $2 = a^2$ après simplifications. Il suffit donc de prendre $\boxed{a = \sqrt{2}}$

Remarque. Il s'agit en fait de l'unique solution positive, l'autre étant $-\sqrt{2}$.

11. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le terme x_n est bien défini et que $x_n > a$.

Procédons par récurrence.

- On considère les assertions A_n : « $\boxed{x_n \text{ est bien défini et } x_n > a}$ » pour $n \in \mathbb{N}$.
- **Initialisation.** $x_0 = 2$ est bien défini d'après l'énoncé et $2 > \sqrt{2}$, donc A_0 est établie.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons A_n et montrons A_{n+1}. Par hypothèse, x_n est bien défini et $x_n > a$. En particulier, $x_n > 0$ car $a > 0$, donc $x_n \neq 0$ et $\dfrac{x_n}{2} + \dfrac{1}{x_n}$ est bien défini. Ainsi, $\boxed{x_{n+1} \text{ est bien défini.}}$
  De plus, $\dfrac{x_n}{2} + \dfrac{1}{x_n} = \dfrac{(x_n-a)^2}{2x_n} + a > 0 + a$ car $x_n > 0$ et $(x_n-a)^2 > 0$. Donc $\boxed{x_{n+1} > a.}$
- **Conclusion.** D'après le principe de récurrence, on a donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A_n.}$

12. Prouver que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors sa limite appartient à l'ensemble $\{0, a, -a\}$.

Supposons que (x_n) converge, et notons $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite. Distinguons le cas $\boxed{\ell = 0}$ afin de pouvoir diviser.
Si $\ell \neq 0$, on obtient par opérations sur les limites :

$$\frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\ell}{2} + \frac{1}{\ell}, \quad \text{or} \quad \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \ell, \quad \text{donc par unicité de la limite,} \quad \ell = \frac{\ell}{2} + \frac{1}{\ell}.$$

En multipliant par 2ℓ, on obtient $2\ell^2 = \ell^2 + 2$, d'où $|\ell| = \sqrt{2}$ et donc : $\boxed{\ell = \sqrt{2} \text{ ou } \ell = -\sqrt{2}.}$
Conclusion : dans tous les cas, ℓ appartient bien à l'ensemble $\{0, a, -a\}$.

13. (a) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, et préciser son sens de variation.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Étudions le signe de $x_{n+1} - x_n$:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n}{2} - \frac{1}{x_n} - x_n = \frac{2 - (x_n)^2}{2x_n} \leqslant 0 \qquad \text{car } x_n \geqslant \sqrt{2} \text{ d'après la question 11.}$$

Ainsi : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} - x_n \leqslant 0}$ donc la suite (x_n) est $\boxed{\text{monotone, décroissante.}}$

(b) Établir enfin la convergence de la suite (x_n) et déterminer sa limite.

On vient de voir que (x_n) est décroissante. De plus elle est minorée par $a = \sqrt{2}$ d'après la question 11, donc on en déduit qu'elle est convergente d'après le $\boxed{\text{théorème des suites monotones}}$. Notons ℓ sa limite. On a vu à la question 12 que nécessairement $\ell \in \{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$. Or l'inégalité établie à la question 11 donne par passage à la limite $\ell \geqslant a$ donc finalement $\boxed{\ell = a = \sqrt{2}.}$

(c) Justifier que cette convergence et cette limite ne dépendent pas de la valeur de $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$.

La relation de la question 10 montre que $x_1 \geqslant \sqrt{2}$, ce qui permet d'initialiser la récurrence de la question 11 à partir de $n = 1$. Le reste s'adapte ensuite directement : on montre que $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée par $\sqrt{2}$, puis on conclut comme ci-dessus.

14. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |x_{n+1} - a| \leqslant \dfrac{1}{2a}|x_n - a|^2$.

En utilisant la relation de la question 10 et les règles de calcul des valeurs absolues,

$$|x_{n+1} - a| = \left|\frac{(x_n - a)^2}{2x_n} + a - a\right| = \frac{|x_n - a|^2}{2|x_n|} \leqslant \frac{|x_n - a|^2}{2a} \qquad \text{car } x_n \geqslant a > 0.$$

(b) En raisonnant par récurrence, en déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |x_n - a| \leqslant \left(\dfrac{1}{2a}\right)^{2^n - 1}$.

- On considère les assertions A_n : « $\boxed{|x_n - a| \leqslant \left(\dfrac{1}{2a}\right)^{2^n-1}}$ » pour $n \in \mathbb{N}$.
- **Initialisation.** On a $|x_0 - a| = |2 - \sqrt{2}| = 2 - \sqrt{2}$ car $\sqrt{2} \leqslant 2$. De plus $\sqrt{2} \geqslant 1$, donc :

$$|x_0 - a| = 2 - \sqrt{2} \leqslant 1, \quad \text{tandis que} \quad \left(\frac{1}{2a}\right)^{2^0-1} = \left(\frac{1}{2a}\right)^{1-1} = \left(\frac{1}{2a}\right)^0 = 1.$$

  L'inégalité $\boxed{A_0}$ est donc vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons A_n et montrons A_{n+1}. D'après la question précédente :

$$|x_{n+1} - a| \leqslant \frac{1}{2a}|x_n - a|^2 \underset{(\text{d'après } A_n)}{\leqslant} \frac{1}{2a}\left[\left(\frac{1}{2a}\right)^{2^n-1}\right]^2 = \left(\frac{1}{2a}\right)^{2\times(2^n-1)+1} = \left(\frac{1}{2a}\right)^{2^{n+1}-1},$$

  ce qui démontre l'inégalité $\boxed{A_{n+1}.}$
- **Conclusion.** D'après le principe de récurrence, on a donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A_n.}$

15. Soit $p \geqslant 1$ un entier et soit N le premier rang à partir duquel tous les termes de la suite (x_n) approchent le nombre a avec une précision de $p - 1$ chiffres après la virgule, c'est-à-dire le plus petit $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N \implies |x_n - a| < 10^{-p}),$$

(a) Pourquoi existe-t-il nécessairement un tel entier $N \in \mathbb{N}$? Jutifier que $N \geqslant 1$.

On a vu précédemment que (x_n) converge vers a. Donc par définition :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N \implies |x_n - a| < \varepsilon)$$

Puisque $10^{-p} > 0$, il suffit d'appliquer ceci avec $\varepsilon = 10^{-p}$.
De plus, $x_0 = 2$ ne vérifie pas $|x_0 - a| < 10^{-p}$ avec $p \geqslant 1$ car $|x_0 - a| = 2 - \sqrt{2} \approx 0{,}6$.

(b) À l'aide de la question 14, montrer que $N - 1 \leqslant \left\lfloor \ln\left(1 + \dfrac{2p\ln(10)}{3\ln(2)}\right) \times \dfrac{1}{\ln(2)} \right\rfloor$.

Par définition de N, on doit avoir $|x_{N-1} - a| \geqslant 10^{-p}$, donc en particulier $1/(2a)^{2^{N-1}-1} \geqslant 10^{-p}$ d'après la question 14. Or, pour $n \in \mathbb{N}$, la stricte croissance de ln montre que :

$$\left(\frac{1}{2a}\right)^{2^n-1} \geqslant 10^{-p} \iff (2^n - 1)\ln\left(\frac{1}{2a}\right) \geqslant -p\ln(10), \quad \text{avec } \ln\left(\frac{1}{2a}\right) = \ln\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = -\frac{3\ln(2)}{2}.$$

En divisant par ce nombre (qui est négatif) puis en passant à nouveau au logarithme :

$$\left(\frac{1}{2a}\right)^{2^n-1} \geqslant 10^{-p} \iff 2^n \leqslant 1 + \frac{2p\ln(10)}{3\ln(2)} \iff n\ln(2) \leqslant \ln\left(1 + \frac{2p\ln(10)}{3\ln(2)}\right).$$

Pour $n = N-1$, on obtient ainsi :

$$N-1 \leqslant \ln\left(1+\frac{2p\ln(10)}{3\ln(2)}\right)\frac{1}{\ln(2)}, \quad \text{d'où} \quad N-1 \leqslant \left\lfloor \ln\left(1+\frac{2p\ln(10)}{3\ln(2)}\right)\times\frac{1}{\ln(2)}\right\rfloor$$

par définition de la partie entière, car $N-1$ est un entier.

(c) Écrire *en langage Scilab* une fonction nommée `calculeRang`, qui prend en entrée un entier `p`, et telle que `calculeRang`(p) renvoie en sortie un entier n vérifiant la condition $|x_n - a| < 10^{-p}$.

La question précédente montre qu'il suffit de renvoyer l'entier qui suit la partie entière.

```
function n = calculeRang(p)
  n = floor(log(1+2*p*log(10)/(3*log(2)))/log(2)) + 1
endfunction
```

Exercice 4 : suite récurrentes linéaires

16. Soit (u_n) une suite de réels telle que $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{u_n}{2}$.

(a) Déterminer le terme général de cette suite.

Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2, dont l'équation caractéristique $x^2 - x - \frac{1}{2} = 0$ a un discriminant de 3. Cette équation admet donc deux racines distinctes :

$$\lambda = \frac{1+\sqrt{3}}{2}, \qquad \mu = \frac{1-\sqrt{3}}{2}.$$

D'après le théorème de structure vu en cours, on sait qu'il existe deux réels A et B tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = A\,\lambda^n + B\,\mu^n$. Les valeurs de u_0 et u_1 permettent de calculer ces constantes :

$$\left\{\begin{array}{rcrl} A & + & B & = 0 \\ A\lambda & + & B\mu & = 1 \end{array}\right. \underset{L_2 \leftarrow L_2 - \lambda L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrl} A & + & B & = 0 \\ & & B(\mu-\lambda) & = 1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrl} A & + & B & = 0 \\ & - & B\sqrt{3} & = 1 \end{array}\right.$$

On obtient donc $B = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $A = \frac{1}{\sqrt{3}}$, d'où : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^n\right].}$

(b) En déduire la limite de (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

On a $1 < \sqrt{3} < 2$, donc $\frac{1+\sqrt{3}}{2} > 1$ et $\left|\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right| = \frac{\sqrt{3}-1}{2} < 1$. D'après le théorème de convergence des suites géométrique, on obtient donc :

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty, \quad \text{et} \quad \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \text{d'où} \quad \boxed{u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty} \quad \text{par opérations.}$$

17. On considère maintenant (v_n) telle que $v_0 = 0$, $v_1 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+2} = v_{n+1} - \frac{v_n}{2}$.

(a) La méthode utilisée à la question précédente est-elle exploitable ?

On a encore une suite récurrente linéaire d'ordre 2, mais l'équation caractéristique $x^2 - x + \frac{1}{2} = 0$ a pour discriminant $-1 < 0$. On ne peut donc pas appliquer le théorème du cours.

(b) Soient (a_n) et (b_n) les suites définies par $a_n = v_{n+1} - \frac{v_n}{2}$ et $b_n = \frac{v_n}{2}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n - b_n}{2} \text{ et } b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. L'égalité la plus simple est la deuxième :

$$a_n + b_n = v_{n+1} - \frac{v_n}{2} + \frac{v_n}{2} = v_{n+1}, \quad \text{donc} \quad \boxed{\frac{a_n + b_n}{2} = \frac{v_{n+1}}{2} = b_{n+1}.}$$

Pour l'autre égalité, il suffit de remarquer que $a_n - b_n = v_{n+1} - \frac{v_n}{2} - \frac{v_n}{2} = v_{n+1} - v_n$, d'où :

$$a_{n+1} = v_{n+2} - \frac{v_{n+1}}{2} = v_{n+1} - \frac{v_n}{2} - \frac{v_{n+1}}{2} = \boxed{\frac{v_{n+1} - v_n}{2} = \frac{a_n - b_n}{2}.}$$

(c) En déduire que la suite (r_n) définie par $r_n = \sqrt{(a_n)^2 + (b_n)^2}$ pour $n \in \mathbb{N}$ est géométrique.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Cherchons à exprimer r_{n+1} en fonction de r_n. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
(a_{n+1})^2 + (b_{n+1})^2 &= \frac{(a_n - b_n)^2}{4} + \frac{(a_n + b_n)^2}{4} \\
&= \frac{(a_n)^2 - 2a_n b_n + (b_n)^2}{4} + \frac{(a_n)^2 + 2a_n b_n + (b_n)^2}{4} \\
&= \frac{(a_n)^2 + (b_n)^2}{2}
\end{aligned}$$

Ainsi, $r_{n+1} = \sqrt{\frac{(a_n)^2 + (b_n)^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} r_n$. Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la suite } (r_n) \text{ est géométrique, de raison } \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et de premier terme } r_0 = \sqrt{1+0} = 1.}$$

(d) Étudier la convergence de (r_n). À l'aide d'une comparaison, en déduire celles de (a_n), (b_n) puis (v_n).

Puisque $\sqrt{2} > 1$, le théorème des suites géométriques montre que (r_n) tend vers 0.

Or pout tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $r_n = \sqrt{(a_n)^2 + (b_n)^2} \geqslant \sqrt{(a_n)^2} \geqslant |a_n|$ et de même $r_n \geqslant |b_n|$. Le théorème d'encadrement (ou plutôt son corollaire) montre alors que (a_n) et (b_n) sont toutes les deux convergentes et de limite nulle.

Puisque $v_n = 2b_n$, on en déduit (par opération), que $\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ converge vers la limite } 0.}$