Devoir surveillé n° 2

E1A 2017-2018

Samedi 18 novembre

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. On prendra notamment garde à :

— *lire et appliquer rigoureusement les consignes de l'énoncé ;*
— *justifier chaque réponse par une démonstration précise et concise ;*
— *s'appuyer explicitement sur des éléments précis du cours (définitions, théorèmes, etc.) ;*
— *encadrer les résultats des calculs, mettre en évidence les conclusions ;*
— *respecter l'ordre et la numérotation des questions ;*
— *rédiger la composition sur copie double (idéalement, une nouvelle copie par exercice) ;*
— *laisser une marge sur chaque page, et un bandeau pour les appréciations sur la première ;*
— *écrire à l'encre bleue, de manière lisible ;*

Questions de cours

1. (a) Énoncer la formule du binôme de Newton.
   (b) Rappeler comment s'expriment les coefficients binomiaux en termes de factorielles.
   (c) Montrer que $(1-\sqrt{3})^5 + (1+\sqrt{3})^5$ est un entier et donner sa valeur.
2. Soit (u_n) une suite de réels.
   (a) Formuler avec des quantificateurs l'assertion : « (u_n) tend vers $+\infty$ ».
   (b) Formuler avec des quantificateurs l'assertion : « (u_n) est bornée ».
3. Soient P et Q deux polynômes tels que $\deg(P) \leqslant 2017$ et $\deg(Q) \leqslant 2017$.
   (a) Que peut-on dire de $\deg(P+Q)$ et de $\deg(P \times Q)$?
   (b) Existe-t-il P et Q tels que $\deg(P+Q) = 11$ et $\deg(P \times Q) = 18$? Si oui, donner un exemple.
   (c) Existe-t-il P et Q tels que $\deg(P+Q) = 18$ et $\deg(P \times Q) = 11$? Si oui, donner un exemple.
   (d) Existe-t-il un polynôme dont les racines sont 18, 11 et 2017 ? Si oui, donner un exemple.
4. (a) Rappeler la syntaxe *en langage Scilab* pour définir une fonction nommée `f` qui possède un argument d'entrée `x` et un argument de sortie `y`.
   (b) Écrire en langage Scilab une fonction `sommeEtProduit` qui prend en argument deux nombres `a` et `b` et qui renvoie leur somme et leur produit en sortie.
   Exemple d'utilisation en console :

```
-->[s,p] = sommeEtProduit(18,11)
 p  =
    198.
 s  =
    29.
```

Exercice 1 : calcul de sommes et produits

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier.

5. (a) Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sqrt{\frac{5^{k+4}}{3^{2k}}}$.

   (b) Déterminer la limite de (S_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

6. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer que $\dfrac{(3k+1)(2k)!}{k!(k+1)!} = \dbinom{2k+2}{k+1} - \dbinom{2k}{k}$.

   (b) En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(3k+1)(2k)!}{k!(k+1)!}$.

7. (a) Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k)$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$.

   (b) Justifier sans calcul que $\displaystyle\sum_{m=1}^{2n} m = \sum_{k=1}^{n}(2k) + \sum_{k=1}^{n}(2k-1)$, puis le vérifier.

   (c) Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k)$, puis en déduire que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$.

Exercice 2 : fonctions numériques

On considère les fonctions numériques f et g définies par :

$$f : x \mapsto \ln(2-x) + \ln(2+x), \quad \text{et} \quad g : y \mapsto 2\sqrt{1-y^y}$$

8. (a) Déterminer D_f, le domaine de définition de f.

   (b) Étudier la parité de f.

   (c) Déterminer une fonction u telle que $f = \ln \circ u$. En déduire les variations de f.

   (d) Exprimer l'ensemble-image de f sous forme d'un intervalle.

9. (a) Pour quels $y \in \mathbb{R}$ la puissance y^y est-elle bien définie ? L'exprimer sous forme exponentielle.

   (b) En déduire le domaine de définition de g.

   (c) Exprimer le domaine de définition de $f \circ g$ comme un intervalle, puis simplifier l'expression de $f \circ g$.

   (d) Exprimer le domaine de définition de $g \circ f$ comme réunion de deux intervalles.

Exercice 3 : suite définie par itération

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de réels telle que $x_0 = 2$ et pour tout n entier naturel, $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2} + \dfrac{1}{x_n}$.

10. Déterminer un réel $a > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{x}{2} + \frac{1}{x} = \frac{(x-a)^2}{2x} + a.$$

Cette relation sera très utile pour les questions qui suivent.

11. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le terme x_n est bien défini et que $x_n > a$.
12. Prouver que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors sa limite appartient à l'ensemble $\{0, a, -a\}$.
13. (a) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, et préciser son sens de variation.
    (b) Établir enfin la convergence de la suite (x_n) et déterminer sa limite.
    (c) Justifier que cette convergence et cette limite ne dépendent pas de la valeur de $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$.
14. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |x_{n+1} - a| \leqslant \dfrac{1}{2a}|x_n - a|^2$.
    (b) En raisonnant par récurrence, en déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |x_n - a| \leqslant \left(\dfrac{1}{2a}\right)^{2^n - 1}$.
15. Soit $p \geqslant 1$ un entier et soit N le premier rang à partir duquel tous les termes de la suite (x_n) approchent le nombre a avec une précision de $p-1$ chiffres après la virgule, c'est-à-dire le plus petit $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N \implies |x_n - a| < 10^{-p}),$$

    (a) Pourquoi existe-t-il nécessairement un tel entier $N \in \mathbb{N}$? Justifier que $N \geqslant 1$.
    (b) À l'aide de la question 14, montrer que $N - 1 \leqslant \left\lfloor \ln\left(1 + \dfrac{2p\ln(10)}{3\ln(2)}\right) \times \dfrac{1}{\ln(2)} \right\rfloor$.
    (c) Écrire *en langage Scilab* une fonction nommée `calculeRang`, qui prend en entrée un entier `p`, et telle que `calculeRang(`p`)` renvoie en sortie un entier n vérifiant la condition $|x_n - a| < 10^{-p}$.

Exercice 4 : suites récurrentes linéaires

16. Soit (u_n) une suite de réels telle que $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + \dfrac{u_n}{2}$.
    (a) Déterminer le terme général de cette suite.
    (b) En déduire la limite de (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
17. On considère maintenant (v_n) telle que $v_0 = 0$, $v_1 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+2} = v_{n+1} - \dfrac{v_n}{2}$.
    (a) La méthode utilisée à la question précédente est-elle exploitable ?
    (b) Soient (a_n) et (b_n) les suites définies par $a_n = v_{n+1} - \dfrac{v_n}{2}$ et $b_n = \dfrac{v_n}{2}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n - b_n}{2} \text{ et } b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

    (c) En déduire que la suite (r_n) définie par $r_n = \sqrt{(a_n)^2 + (b_n)^2}$ pour $n \in \mathbb{N}$ est géométrique.
    (d) Étudier la convergence de (r_n). À l'aide d'une comparaison, en déduire celles de (a_n), (b_n) puis (v_n).