Devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 1

E1A 2017-2018

samedi 7 octobre

Questions de cours

1. Soient A et B deux énoncés mathématiques.
   (a) Quelle est la négation de « $A \implies B$ » ?

   A et non(B) (la négation d'une implication n'est pas une implication !)

   (b) Quelle est la contraposée de « $A \implies B$ » ?

   non(B) $\implies$ non(A) (rappelons que ceci est *équivalent* à $A \implies B$)

   (c) Quelle est la rédaction-type pour démontrer « $A \implies B$ » ?

   Supposons A. Alors [...] donc B. (Conclusion : on a montré que A implique B.)

2. Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$.
   (a) Donner la définition de « f est décroissante ».

   Pour tous x et y réels tels que $x \leqslant y$, on a $f(x) \geqslant f(y)$. Autrement dit :

   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ ((x \leqslant y) \implies (f(x) \geqslant f(y)))$$

   (b) Donner la définition de « f est majorée ».

   Il existe M réel tel que, pour tout réel x, on a $f(x) \leqslant M$. Autrement dit :

   $$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant M.$$

   (attention à l'ordre des deux quantificateurs !)

   (c) Donner la définition de « f admet un minimum ».

   Il existe a réel tel que, pour tout réel x, on a $f(x) \leqslant f(a)$. Autrement dit :

   $$\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant f(a).$$

   (autrement dit, il existe a réel tel que f est minorée par $f(a)$)

3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le polynôme du second degré défini par $x \mapsto x^2 - 7x + 10$.
   (a) Écrire f sous forme canonique. La fonction f admet-elle un maximum ? un minimum ?

   Soit x réel. On commence par reconnaître dans $f(x)$ le début de l'identité remarquable

   $$(x - \tfrac{7}{2})^2 = x^2 - 7x + (\tfrac{7}{2})^2 = x^2 - 7x + \tfrac{49}{4}.$$

   On obtient donc : $f(x) = (x - \frac{7}{2})^2 + 10 - \frac{49}{4} = \boxed{(x - \frac{7}{2})^2 - \frac{9}{4}}$

   Puisque le coefficient de degré 2 est strictement positif, on sait d'après le cours que cette fonction n'est pas majorée (en particulier, elle n'a pas de *maximum*) mais qu'elle admet un *minimum*. On peut aussi retrouver ce dernier point à l'aide de la forme canonique car $(x - \frac{7}{2})^2$ est toujours positif et s'annule lorsque $x = \frac{7}{2}$. Ceci montre aussi que le minimum vaut $f(\frac{7}{2}) = 0^2 - \frac{9}{4} = -\frac{9}{4}$.

(b) Dresser sans justification le tableau de variation de f.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $u_1, \dots, u_n$ et $v_1, \dots, v_n$ des réels tels que $\sum_{i=1}^{n} u_i = 20$ et $\sum_{i=1}^{n} v_i = 17$.

(a) Calculer la somme $\sum_{i=1}^{n}(7u_i - 10v_i)$ en citant le nom de la propriété utilisée.

D'après la propriété de *linéarité* de la notation Σ :

$$\sum_{i=1}^{n}(7u_i - 10v_i) = 7\sum_{i=1}^{n} u_i - 10\sum_{i=1}^{n} v_i = 7 \times 20 - 10 \times 17 = 140 - 170 = \boxed{-30}$$

(b) Calculer $\sum_{i=0}^{n-1} u_{i+1}$ et $\sum_{i=1}^{n} v_{n+1-i}$ en justifiant précisément le résultat.

Procédons au changement d'indices « $j = i+1$ » pour le premier calcul. La condition de sommation $i \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$ devient $j \in \{0+1, 1+1, \cdots, n-1+1\}$, c'est-à-dire $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Ainsi :

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n-1} u_{i+1} = \sum_{j=1}^{n} u_j = \sum_{i=1}^{n} u_i = 20}$$

De même, avec le changement d'indices « $k = (n+1) - i$ », la condition de sommation $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ devient $k = \{n, n-1, \dots, 1\}$ et on obtient donc :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} v_{n+1-i} = \sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{i=1}^{n} v_i = 17}$$

5. Donner sans simplification la valeur des sommes suivantes :

$$\sum_{k=7}^{2017} 10, \qquad \sum_{k=0}^{710} (2017)^k, \qquad \sum_{k=1}^{2017} k, \qquad \sum_{k=1}^{20} k^2, \qquad \sum_{k=1}^{10} k^3.$$

Il suffit d'appliquer les formules :

$$\sum_{k=7}^{2017} 10 = 10 \times (2017 - 7 + 1) \qquad \sum_{k=0}^{710} (2017)^k = \frac{1 - 2017^{710+1}}{1 - 2017}$$

$$\sum_{k=1}^{2017} k = \frac{2017(2017+1)}{2} \qquad \sum_{k=1}^{20} k^2 = \frac{20(20+1)(2 \times 20 + 1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{10} k^3 = \left(\frac{10(10+1)}{2}\right)^2$$

Exercice 1

On considère les fonctions $f : x \mapsto (\ln(x) + 1)^2$ et $g : x \mapsto (1-x)^{\sqrt{x}}$ ainsi que $h = g \circ f$.

6. (a) Déterminer le domaine de définition de f.

Soit x un réel. La fonction f est définie en x si et seulement si $\ln(x)$ est défini, c'est-à-dire si et seulement si $x > 0$. $\boxed{\text{Le domaine de définition } D_f \text{ est donc l'intervalle } \mathbb{R}_+^* =]0; +\infty[.}$

(b) Rappeler la définition de l'ensemble-image $f(\mathbb{R}_+^*)$, puis l'exprimer sous la forme d'un intervalle.

Par définition, $\boxed{f(\mathbb{R}_+^*) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = y\} = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R}_+^*,\ (\ln(x)+1)^2 = y\}}$. Autrement dit, c'est l'ensemble des réels y pour lesquels l'équation $(\ln(x)+1)^2 = y$, d'inconnue x, admet *au moins une* solution dans $\mathbb{R}_+^*$. Afin de pouvoir prendre les racines carrées, on doit distinguer les cas $y \geqslant 0$ et $y < 0$.

<u>1^{er} cas, $y < 0$:</u> il n'existe aucun réel x tel que $(\ln(x)+1)^2 = y$ car le carré d'un réel est positif.

<u>2^e cas, $y \geqslant 0$:</u> en prenant les racines carrées et en remarquant que $\sqrt{(\ln(x)+1)^2} = |\ln(x)+1|$,

$$(\ln(x)+1)^2 = y \iff |\ln(x)+1| = \sqrt{y} \iff \ln(x) = -1 \pm \sqrt{y} \iff x = \exp(-1 \pm \sqrt{y})$$

Dans ce cas, l'équation a donc deux solutions, $\exp(-1+\sqrt{y})$ et $\exp(-1-\sqrt{y})$, qui sont toutes les deux dans $\mathbb{R}_+^*$. *A fortiori*, il existe $x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $(\ln(x)+1)^2 = y$.

<u>Conclusion :</u> $\boxed{f(\mathbb{R}_+^*) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 0\} = \mathbb{R}_+ = [0; +\infty[}$.

(c) Calculer de même l'ensemble-image $f\big([e^{-10}; e^7]\big)$.

De même que ci-dessus, $f([e^{-10}; e^7]) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in [e^{-10}; e^7],\ f(x) = y\}$. On déjà vu que l'équation $f(x) = y$ n'a aucune solution si $y < 0$. On se limite donc au cas $y \geqslant 0$, pour lequel elle admet deux solutions dans $\mathbb{R}_+^*$, à savoir $\exp(-1 \pm \sqrt{y})$. Il reste à déterminer pour quels réels $y \geqslant 0$ l'*une au moins* de ces deux solutions appartient au segment $[e^{-10}; e^7]$.
Soit $y \geqslant 0$. Alors par stricte croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} e^{-10} \leqslant \exp(-1+\sqrt{y}) \leqslant e^7 &\iff -10 \leqslant -1+\sqrt{y} \leqslant 7 \\ &\iff -9 \leqslant \sqrt{y} \leqslant 8 \\ &\iff \sqrt{y} \leqslant 8 && \text{car } \sqrt{y} \geqslant 0 \\ &\iff y \leqslant 64 && \text{car } y \geqslant 0 \text{ et } x \mapsto x^2 \text{ croît strictement sur } \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

De même, pour l'autre solution :

$$\begin{aligned} e^{-10} \leqslant \exp(-1-\sqrt{y}) \leqslant e^7 &\iff -10 \leqslant -1-\sqrt{y} \leqslant 7 \\ &\iff -9 \leqslant -\sqrt{y} \leqslant 8 \\ &\iff -8 \leqslant \sqrt{y} \leqslant 9 \\ &\iff \sqrt{y} \leqslant 9 && \text{car } \sqrt{y} \geqslant 0 \\ &\iff y \leqslant 81 && \text{car } y \geqslant 0 \text{ et } x \mapsto x^2 \text{ croît strictement sur } \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

Ainsi, l'une au moins des deux solutions appartient à $[e^{-10}; e^7]$ si et seulement si $0 \leqslant y \leqslant 64$ *ou* $0 \leqslant y \leqslant 81$. On en déduit que $\boxed{f([e^{-10}; e^7]) = [0; 64] \cup [0; 89] = [0; 89]}$

7. Exprimer g sous forme exponentielle et déterminer son domaine de définition D_g.

Remarquons que $g(x) = (1-x)^\alpha = e^{\alpha \ln(1-x)}$ avec $\alpha = \sqrt{x}$. Ainsi, la fonction g a pour forme exponentielle $\boxed{x \mapsto e^{\sqrt{x}\ln(1-x)}}$. Son domaine de définition D_g est l'ensemble des réels x tels que $x \geqslant 0$ (racine carrée) et $1 - x > 0$ (puissance généralisée, ou logarithme), c'est-à-dire tels que $0 \leqslant x < 1$. Ainsi, $\boxed{D_g = [0; 1[}$

8. Déterminer le domaine de définition de la composée $f \circ g$, puis expliciter cette fonction.

Soit x réel. Alors $f \circ g$ est définie en x si et seulement si $x \in D_g$ et $g(x) \in D_f$. Les deux conditions sont donc : $0 \leqslant x < 1$ et $e^{\sqrt{x}\ln(1-x)} > 0$. Puisque $\exp(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+^*$, la deuxième condition est toujours satisfaite. Le domaine de définition de $f \circ g$ est donc simplement $\boxed{[0; 1[}$.

Supposons $x \in [0; 1[$. Alors $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\ln(g(x)) + 1)^2$. Or $\ln(e^{\sqrt{x}\ln(1-x)}) = \sqrt{x}\ln(1-x)$ donc on obtient finalement :

$$\boxed{(f \circ g)(x) = \big(\sqrt{x}\ln(1-x) + 1\big)^2}$$

9. (a) Soit $x > 0$. Montrer que la fonction $h = g \circ f$ est définie en x si et seulement $|\ln(x)+1| < 1$.

La fonction $g \circ f$ est définie en x si et seulement si $x \in D_f$ et $f(x) \in D_g$. Les deux conditions sont donc : $x > 0$ et $0 \leqslant (\ln(x)+1)^2 < 1$. Un carré étant toujours positif, on obtient la seule condition $(\ln(x)+1)^2 < 1$. On conclut par stricte croissance de la racine carrée sur $\mathbb{R}_+$:

$$(\ln(x)+1)^2 < 1 \iff \sqrt{(\ln(x)+1)^2} < \sqrt{1} \iff \boxed{|\ln(x)+1| < 1}$$

(b) En déduire D_h, le domaine de définition de h.

Il reste à résoudre l'inéquation précédente : pour $x > 0$,

$$|\ln(x)+1| < 1 \iff -1 < \ln(x)+1 < 1 \iff -2 < \ln(x) < 0 \iff e^{-2} < x < 1$$

par stricte croissance de exp sur $\mathbb{R}$. Le domaine de définition de h est donc $\boxed{D_h = \left]e^{-2};1\right[}$

(c) Montrer que pour tout $x \in D_h$:

$$h(x) = \left((\ln(x)+2) \times \ln\left(\tfrac{1}{x}\right)\right)^{|\ln(x)+1|}$$

Par définition de la composition, on peut écrire : $h(x) = g(f(x)) = (1-f(x))^{\sqrt{f(x)}}$. Or :

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{(\ln(x)+1)^2} = |\ln(x)+1|,$$

et une deuxième simplification est possible en reconnaissant une identité remarquable :

$$1 - f(x) = 1^2 - (\ln(x)+1)^2 = (1-\ln(x)-1)(1+\ln(x)+1) = -\ln(x)\ln(x+2).$$

Puisque $-\ln(x) = \ln(\frac{1}{x})$, on obtient bien la formule demandée.

10. (a) Justifier que pour tout $x \in D_g,\ g(x) \leqslant e^{-x^{3/2}}$.

On a vu précédemment que g a pour forme exponentielle $x \mapsto e^{\sqrt{x}\ln(1-x)}$. Soit $x \in D_g$. L'inégalité de concavité du logarithme montre que $\ln(1-x) \leqslant -x$. Puisque $\sqrt{x} \geqslant 0$, on en déduit que :

$$\sqrt{x}\ln(1-x) \leqslant -\sqrt{x}\,x = -x^{1/2}x^1 = -x^{3/2}.$$

On conclut enfin par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$.

(b) En déduire que h admet le nombre 1 comme maximum.

Par définition d'un maximum, il y a deux choses à vérifier :

— Le nombre 1 est un majorant de h.

— Il existe $a \in D_h$ tel que $h(a) = 1$.

Pour le premier point, on utilise la question précédente :
Soit $x \in D_h$. Alors $f(x) \in D_g$, donc $h(x) = g(f(x)) \leqslant e^{-f(x)^{3/2}}$. Or $D_g = [0;1[$, donc $f(x) \geqslant 0$ et on en déduit que $h(x) \leqslant e^0$ par croissance de l'exponentielle. Ceci prouve donc que :

$$\boxed{\forall x \in D_h, \quad h(x) \leqslant 1}$$

Il reste à montrer que ce majorant est *atteint*. Il suffit pour cela de poser $\boxed{a = e^{-1}}$ car :

$$f(a) = f(e^{-1}) = \left(\ln(e^{-1})+1\right)^2 = (-1+1)^2 = 0^2 = 0,$$

et donc $h(a) = g(f(a)) = g(0) = (1-0)^{\sqrt{0}} = 1^0 = 1.$

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dont le domaine de définition D est symétrique par rapport à 0.

11. (a) Formuler avec des quantificateurs l'assertion « f est paire ».

Formule : $\boxed{\forall x \in D, \quad f(-x) = f(x)}$

(b) Formuler avec des quantificateurs l'assertion « f n'est pas paire ».

Il s'agit de la négation de « f est paire » : $\boxed{\exists x \in D,\ f(-x) \neq f(x)}$

12. On suppose dans cette question que f est définie par $x \mapsto \ln(2|x| + x)$.

(a) Déterminer le domaine de définition de f et vérifier qu'il est symétrique par rapport à 0.

Soit x réel. Alors $\ln(2|x| + x)$ est bien défini si et seulement si $2|x| + x > 0$ (logarithme). Distinguons deux cas afin de simplifier la valeur absolue.

1er cas, $x \geqslant 0$: alors $2|x| + x = 2x + x = 3x$, donc $2|x| + x > 0$ équivaut à $3x > 0$.

2e cas, $x < 0$: alors $2|x| + x = -2x + x = -x$, donc $2|x| + x > 0$ équivaut à $-x > 0$.

Le domaine de définition est donc $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ ou } x < 0\}$, c'est-à-dire $\boxed{\mathbb{R}^*}$.
Il est bien symétrique puisque : $\forall x \in \mathbb{R},\ (x \neq 0 \iff -x \neq 0)$.

(b) La fonction f est-elle paire ? est-elle impaire ?

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Alors $f(-x) = \ln(2|-x| + (-x)) = \ln(2|x| - x)$.
En particulier, $f(-1) = \ln(2 - 1) = \ln(1) = 0$ alors que $f(1) = \ln(2 + 1) = \ln(3)$. Or $\ln(3) \neq 0$ donc $f(-1) \neq f(1)$ et $f(-1) \neq -f(1)$. $\boxed{\text{Ainsi, } f \text{ n'est } \textit{pas paire} \text{ et n'est } \textit{pas impaire} \text{ non plus.}}$

13. Soient $g : D \to \mathbb{R}$ une fonction paire et $h : D \to \mathbb{R}$ une fonction impaire.

(a) Rappeler la définition de la fonction $g + h$.

Il s'agit de la fonction $D \to \mathbb{R}$ définie par $\boxed{x \mapsto g(x) + h(x)}$

(b) Montrer que si $f = g + h$, alors : $\forall x \in D,\ g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$.

Soit $x \in D$. Alors $f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x)$ car g est paire et h est impaire. Ainsi :

$$\boxed{\frac{f(x) + f(-x)}{2} = \frac{g(x) + h(x) + g(x) - h(x)}{2} = \frac{2g(x) + 0}{2} = g(x)}$$

(c) Montrer que si $f = g + h$, alors : $\forall x \in D,\ h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$.

Soit $x \in D$. En raisonnant comme ci-dessus, on peut aussi écrire :

$$\boxed{\frac{f(x) - f(-x)}{2} = \frac{g(x) + h(x) - (g(x) - h(x))}{2} = \frac{g(x) + h(x) - g(x) + h(x)}{2} = \frac{0 + 2h(x)}{2} = h(x)}$$

14. Démontrer qu'il existe f_0 paire et f_1 impaire définies sur D telles que $f = f_0 + f_1$.

On peut s'inspirer de la question précédente en posant :

$$\boxed{f_0 : x \mapsto \frac{f(x) + f(-x)}{2}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{f_1 : x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{2}}$$

Alors $f_0 + f_1 = f$ puisque, pour tout $x \in D$,

$$f_0(x) + f_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = \frac{2f(x) + 0}{2} = f(x).$$

On montrer de même que f_0 est paire et f_1 est impaire : pour tous $x \in D$,

$$f_0(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = f_0(x)$$
$$\text{et} \quad f_1(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -f_1(x)$$

15. Justifier que le couple de fonctions (f_0, f_1) vérifiant ces propriétés est unique.

Supposons qu'on dispose d'un deuxième couple (f_0', f_1') avec f_0' paire, f_1' impaire et $f = f_0' + f_1'$. Alors en appliquant les questions 13.(b) et 13.(c) avec $g = f_0'$ et $h = f_1'$, on voit qu'on a en fait $f_0' = f_0$ et $f_1' = f_1$.

On dit que f_0 est la *partie paire* de f et que f_1 est sa *partie impaire*.

16. Déterminer la partie paire et la partie impaire de la fonction $x \mapsto 7x^2 - 10x + 2017$.

Cette fonction s'écrit $g + h$ en posant $g : x \mapsto 7x^2 + 2017$ et $h : x \mapsto -10x$. Or g est paire et h est impaire donc, *par unicité*, on en déduit que g est *la* partie paire et que h est *la* partie impaire.

17. On suppose à nouveau que f est définie par $x \mapsto \ln(2|x| + x)$.
   (a) Montrer que f admet pour partie paire la fonction $f_0 : x \mapsto \ln(|x|\sqrt{3})$.

   On peut utiliser les formules précédentes : pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \frac{f(x) + f(-x)}{2} \\ &= \frac{\ln(2|x| + x) + \ln(2|x| - x)}{2} && \text{(voir 12.(a))} \\ &= \frac{\ln\left((2|x| + x)(2|x| - x)\right)}{2} && \text{(par propriété de ln)} \\ &= \frac{\ln\left((2|x|)^2 - x^2\right)}{2} && \text{(identité remarquable)} \\ &= \frac{\ln\left(4x^2 - x^2\right)}{2} && \text{(car } |x|^2 = x^2\text{)} \\ &= \frac{\ln(3x^2)}{2} \\ &= \frac{1}{2}\ln(3x^2) \\ &= \ln\left(\sqrt{3x^2}\right) && \text{(par propriété de ln)} \\ &= \ln\left(\sqrt{3}\,|x|\right) && \text{(car } \sqrt{x^2} = |x|\text{)} \end{aligned}$$

   (b) Exprimer de même la partie impaire f_1 et montrer qu'elle ne prend que deux valeurs.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f_1(x) = \frac{\ln(2|x| + x) - \ln(2|x| - x)}{2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2|x| + x}{2|x| - x}\right).$$

   Distinguons deux cas :

   — Si $x > 0$, on obtient $f_1(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2x + x}{2x - x}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3x}{x}\right) = \boxed{\frac{1}{2}\ln(3)}$

   — Si $x < 0$, on obtient $f_1(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{-2x + x}{-2x - x}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{-x}{-3x}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{3}\right) = \boxed{-\frac{1}{2}\ln(3)}$

   Remarque. Il est normal que les deux valeurs soient opposées l'une de l'autre puisque la fonction f_1 est impaire. Nous aurions pu utiliser cet argument pour traiter le cas $x < 0$ sans aucun calcul.

Exercice 3

L'objectif de cet exercice est d'étudier quelques propriétés des deux fonctions numériques suivantes :

$$\phi : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \qquad \psi : y \mapsto \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$

Propriétés de symétrie

18. Déterminer le domaine de définition de ϕ.

Soit x un réel. Alors le nombre $\phi(x)$ est bien défini si et seulement si $e^x + e^{-x} \neq 0$. Or e^x et e^{-x} sont strictement positifs, donc leur somme l'est également. Le domaine de définition est donc $\boxed{D_\phi = \mathbb{R}}$

19. La fonction ϕ est-elle paire ? est-elle impaire ?

- Le domaine de définition $D_\phi = \mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0.
- Pour tout x réel : $\phi(-x) = \dfrac{e^{(-x)} - e^{-(-x)}}{e^{(-x)} + e^{-(-x)}} = \dfrac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + e^x} = -\phi(x)$.

On en déduit que ϕ est impaire et n'est pas paire : $\phi(1) > 0$ et $\phi(-1) = -\phi(1) < 0$ donc $\phi(1) \neq \phi(-1)$.

20. Déterminer le domaine de définition de ψ.

Soit y réel. Alors $\psi(y)$ est bien défini si et seulement si $1 - y \neq 0$ (fraction) et $\dfrac{1+y}{1-y} > 0$ (logarithme). Avec les tableaux de signe de $y \mapsto 1+y$ et $y \mapsto 1-y$, on en déduit que ψ a pour domaine $\boxed{D_\psi =]-1;1[}$

21. La fonction ψ est-elle paire ? est-elle impaire ?

- Le domaine de définition $D_\psi =]-1;1[$ est symétrique par rapport à 0.
- Pour tout $y \in D_\psi$: $\psi(-y) = \ln\left(\dfrac{1+(-y)}{1-(-y)}\right) = \ln\left(\dfrac{1-y}{1+y}\right) = -\ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right) = -\psi(y)$.

On en déduit que ψ est impaire et n'est pas paire : $\psi(\frac{1}{2}) = \ln(3) > 0$ et $\psi(-\frac{1}{2}) = -\ln(3) < 0$.

Étude de ϕ

22. (a) Montrer que pour tout x réel, $|e^x - e^{-x}| \leqslant |e^x + e^{-x}|$.

Soit x réel. D'après l'inégalité triangulaire, on peut écrire :

$$|e^x - e^{-x}| = |e^x + (-e^{-x})| \leqslant |e^x| + |-e^{-x}| = e^x + e^{-x} \qquad (\text{car } e^x > 0 \text{ et } e^{-x} > 0)$$

Par ailleurs $|e^x + e^{-x}| = e^x + e^{-x}$ car $e^x + e^{-x} > 0$, d'où le résultat demandé.

(b) En déduire que ϕ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\phi(x)| = \left|\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right| = \dfrac{|e^x - e^{-x}|}{|e^x + e^{-x}|} \leqslant 1$ (d'après le (a)). Donc ψ est bornée par 1.

(c) La fonction ϕ est-elle majorée ? est-elle minorée ?

Puisque ϕ est bornée par 1, elle est à la fois majorée (par 1) et minorée (par -1).

23. *Variations.* On introduit deux fonctions auxiliaires $u : x \mapsto \exp(2x)$ et $v : x \mapsto \dfrac{x-1}{x+1}$.

(a) Déterminer deux réels a et b tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad v(x) = a + \frac{b}{x+1}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq 1$. Alors $\dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{x+1-2}{x+1} = \dfrac{x+1}{x+1} - \dfrac{2}{x+1} = 1 + \dfrac{(-2)}{x+1}$.
Il suffit donc de poser $\boxed{a=1}$ et $\boxed{b=-2}$.

(b) En déduire le tableau de variation de v.

Le domaine de définiton $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ n'est pas un intervalle, donc on doit étudier séparément les variations sur ses deux composantes. Sur chacun de ces intervalles, v est la composée de $x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$ qui décroît strictement et de $y \mapsto 1-2y$ qui décroît strictement aussi, donc v est strictement croissante sur $]-\infty;-1[$ ainsi que sur $]-1;+\infty[$. (mais pas sur la réunion des deux)

(c) Exprimer les fonctions $u \circ v$ et $v \circ u$, puis déterminer leurs domaines de définition.

Soit x réel. Sous réserve que $(u \circ v)(x)$ et $(v \circ u)(x)$ soient bien définis, on a :

$$(u \circ v)(x) = \exp(2v(x)) = \boxed{\exp\left(\frac{2(x-1)}{x+1}\right)} \quad \text{et} \quad (v \circ u)(x) = \frac{u(x)-1}{u(x)+1} = \boxed{\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}}$$

<u>Domaine de $u \circ v$:</u> cette fonction est définie en x si et seulement si $x+1 \neq 0$ (division). Le domaine de définition est donc $\boxed{D_{u\circ v} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}}$

<u>Domaine de $v \circ u$:</u> cette fonction est définie en x si et seulement si $e^{2x}+1 \neq 0$ (division). Mais ceci est toujours vérifié car $e^{2x} > 0$, donc le domaine est $\boxed{D_{v\circ u} = \mathbb{R}}$

(d) Montrer que $\phi = u \circ v$ ou $\phi = v \circ u$.

Le domaine de définiton permet déjà d'éliminer $u \circ v$. Vérifions donc que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \phi(x) = (v \circ u)(x)$.
Soit x réel. Puisque $e^x = e^{2x-x} = e^{2x}e^{-x}$, on peut factoriser puis simplifier de la manière suivante :

$$\phi(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{-x} \times (e^{2x}-1)}{e^{-x} \times (e^{2x}+1)} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = (v \circ u)(x).$$

Conclusion : $\boxed{\phi = v \circ u}$

(e) Établir finalement le tableau de variation de ϕ.

La fonction u est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $\exp(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+^*$ donc $u(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+^* \subset]-1;+\infty[$. Puisque v croît strictement sur cet intervalle, on en déduit qu'il en va de même pour ϕ sur $\mathbb{R}$.

24. *Ensemble-image.*

(a) Montrer que pour tous x et y réels :

$$\phi(x) = y \iff (1-y)e^{2x} = 1+y$$

Soient x et y réels. Alors :

$$\begin{aligned}
\phi(x) = y &\iff (v \circ u)(x) = y && \text{(d'après 23.(d))}\\
&\iff \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = y \\
&\iff e^{2x} - 1 = (e^{2x}+1)y && \text{(car } e^{2x}+1 \neq 0\text{)}\\
&\iff e^{2x} - 1 = e^{2x}y + y && \text{(développement)}\\
&\iff e^{2x} - e^{2x}y = 1 + y \\
&\iff e^{2x}(1-y) = 1+y && \text{(factorisation)}
\end{aligned}$$

(b) Rappeler la définition de l'ensemble-image $\phi(\mathbb{R})$.

Par définition, $\boxed{\phi(\mathbb{R}) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R},\ \phi(x) = y\}}$

Autrement dit, il s'agit de l'ensemble des $y \in \mathbb{R}$ tels que l'équation $\phi(x) = y$ (d'inconnue x) admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

(c) Déterminer cet ensemble et l'écrire sous la forme d'un intervalle.

Étudions l'équation $\phi(x) = y$ en fonction de y, sous la forme équivalente $(1-y)e^{2x} = 1+y$ (d'après la question (a)). Avant de pouvoir diviser par $1-y$, on doit distinguer deux cas.

<u>1^{er} cas, si $1-y=0$:</u> on obtient alors $\phi(x) = y \iff 0 = 1+y \iff y = -1$. Il n'y a aucune solution dans ce cas, car sinon on aurait à la fois $y=-1$ et $y=1$ (car $1-y=0$), ce qui est absurde.

<u>2^e cas, si $1-y \neq 0$:</u> en divisant, on obtient alors $\phi(x) = y \iff e^{2x} = \dfrac{1+y}{1-y}$. Avant de pouvoir passer au logarithme, on doit distinguer à nouveau deux cas.

- Si $\dfrac{1+y}{1-y} \leqslant 0$, il n'y a aucune solution car $\exp(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+^*$.
- Si $\dfrac{1+y}{1-y} > 0$, alors $\phi(x) = y \iff 2x = \ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right)$. Il y a une solution : $x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right)$.

<u>Conclusion :</u> l'ensemble-image est donc l'ensemble des y réels tels que $1-y \neq 0$ et $\dfrac{1+y}{1-y} > 0$. On est ramené à l'étude de signe déjà effectuée à la question 20. On en déduit que $\boxed{\phi(\mathbb{R}) =]-1;1[}$

25. La fonction ϕ admet-elle un maximum ? un minimum ?

D'après ce qui précède, ϕ n'admet ni maximum ni minimum car l'intervalle $]-1;1[$ n'a pas de plus grand élément ni de plus petit élément. En effet 1 et -1 n'appartiennent pas à l'intervalle.

Étude de ψ à l'aide de ϕ

26. *Relation entre ϕ et ψ.*

(a) Montrer que pour tous x réel et $y \in]-1;1[$, on a l'équivalence :

$$\psi(y) = x \iff y = \phi\left(\frac{x}{2}\right)$$

Soit x réel et $y \in]-1;1[$. Alors $\dfrac{1+y}{1-y} > 0$, donc les calculs effectués au 24.(c) entraînent que :

$$\begin{aligned}
\psi(y) = x &\iff \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = x \\
&\iff 2 \times \frac{x}{2} = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \\
&\iff \phi\left(\frac{x}{2}\right) = y
\end{aligned}$$

(b) Simplifier alors l'expression des fonctions composées $\phi \circ \psi$ et $\psi \circ \phi$.

— Soit x réel. Afin de calculer $\psi(\phi(x))$, posons $y = \phi(x)$. Alors $y \in]-1;1[$ (ensemble-image de ϕ), et si on note $x' = 2x$, alors $y = \phi(x'/2)$. D'après l'équivalence de 26.(b), on en déduit que $\psi(y) = x'$. Autrement dit, $\boxed{(\psi \circ \phi)(x) = \psi(\phi(x)) = \psi(y) = 2x}$

— Soit $y \in]-1;1[$ et soit $x = \psi(y)$. Alors $x = \ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right)$, donc $e^x = \dfrac{1+y}{1-y}$ et $e^{-x} = \dfrac{1-y}{1+y}$. Après calculs, on en déduit que :

$$e^x - e^{-x} = \frac{(1+y)^2 - (1-y)^2}{(1-y)(1+y)} = \frac{4y}{1-y^2}, \qquad e^x + e^{-x} = \frac{(1+y)^2 + (1-y)^2}{(1-y)(1+y)} = \frac{2(1+y^2)}{1-y^2}$$

et finalement : $\phi(\psi(y)) = \phi(x) = \dfrac{4y}{1-y^2} \times \dfrac{1-y^2}{2(1+y^2)} = \boxed{\dfrac{2y}{1+y^2}}$

27. *Monotonie.*
    (a) Soient y_1 et y_2 dans $]-1;1[$ tels que $y_1 < y_2$. Démontrer par l'absurde que $\psi(y_1) < \psi(y_2)$.

    Supposons qu'au contraire $\psi(y_1) \geqslant \psi(y_2)$. Alors $\phi(\psi(y_1)) \leqslant \phi(\psi(y_2))$ par croissance de ϕ. Puisque y_1 et y_2 sont dans $\phi(\mathbb{R})$, il existe x_1 et x_2 réels tels que $y_1 = \phi(x_1)$ et $y_2 = \phi(x_2)$. D'après 26.(b), on a alors $\psi(y_1) = \psi(\phi(x_1)) = 2\,x_1$ et $\psi(y_2) = \psi(\phi(x_2)) = 2\,x_2$, donc l'hypothèse entraîne $x_1 \geqslant x_2$. La fonction ϕ étant croissante, on obtient enfin $\phi(x_1) \geqslant \phi(x_2)$, c'est-à-dire $y_1 \geqslant y_2$. Ceci contredit le fait que $y_1 < y_2$. Conclusion : $\psi(y_1) < \psi(y_2)$.

    (b) En déduire que ψ est strictement monotone et préciser le sens de variation.

    La question précédente démontre que : $\forall (y_1, y_2) \in D_\psi^2,\ ((y_1 < y_2) \implies (\psi(y_1) < \psi(y_2))$.
    Par définition, $\boxed{\text{la fonction } \psi \text{ est donc strictement croissante.}}$

28. Déterminer l'ensemble-image de la fonction ψ.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors en posant $y = \phi(\frac{x}{2})$, on a $\psi(y) = \psi(\phi(\frac{x}{2})) = 2 \times \frac{x}{2} = x$ d'après 26.(a). Ainsi, tout réel admet un antécédent pour la fonction ψ. Autrement dit, l'ensemble-image est : $\boxed{\psi(]-1;1[) = \mathbb{R}}$

29. (a) Formuler avec des quantificateurs l'assertion « ψ n'est pas bornée ».

    L'assertion « ψ est bornée » s'écrit : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall y \in D_\psi,\ |\psi(y)| \leqslant M$.
    Sa négation « ψ n'est pas bornée » est donc simplement : $\boxed{\forall M \in \mathbb{R}, \exists y \in D_\psi,\ |\psi(y)| > M}$

    (b) La fonction ψ est-elle bornée ? Admet-elle un maximum ? un minimum ?

    Puisque $\psi(D_\psi) = \mathbb{R}$, si cette fonction était bornée, il existerait un réel M tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| \leqslant M$. En particulier pour $x = 1 + |M|$, on aurait $|1 + |M|| \leqslant M$, donc M serait positif et vérifierait $1 + M \leqslant M$, d'où $1 \leqslant 0$.
    Ainsi, la fonction ψ n'est pas bornée. Puisque son ensemble-image est $\mathbb{R}$, un raisonnement tout à fait similaire montre qu'elle n'admet pas de maximum, et de même pas de minimum.

Quelques calculs

30. Vérifier que pour tous a et b réels :

$$\phi(a+b) = \frac{\phi(a)+\phi(b)}{1+\phi(a)\phi(b)}, \qquad \text{et} \qquad \phi(a-b) = \frac{\phi(a)-\phi(b)}{1-\phi(a)\phi(b)}.$$

Pour cette question (et la suivante), il suffit de faire le calcul : mettre au même dénominateur, simplifier, etc. Remarquons tout de même que la deuxième relation se déduit directement de la première en l'appliquant à $-b$ et en utilisant le fait que $\phi(-b) = \phi(b)$ (par imparité de ϕ) :

$$\phi(a-b) = \phi(a+(-b)) = \frac{\phi(a)+\phi(-b)}{1+\phi(a)\phi(-b)} = \frac{\phi(a)-\phi(b)}{1-\phi(a)\phi(b)}.$$

31. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1+\phi(x)^2}{1-\phi(x)^2} = \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}, \qquad \text{et} \qquad \frac{2\phi(x)}{1-\phi(x)^2} = \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}.$$