Devoir surveillé n° 1

E1A 2017-2018

samedi 7 octobre

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. On prendra notamment garde à :

— *lire et appliquer rigoureusement les consignes de l'énoncé ;*
— *justifier chaque réponse par une démonstration précise et concise ;*
— *s'appuyer explicitement sur des éléments précis du cours (définitions, théorèmes, etc.) ;*
— *encadrer les résultats des calculs, mettre en évidence les conclusions ;*
— *respecter l'ordre et la numérotation des questions ;*
— *rédiger la composition sur copie double (idéalement, une nouvelle copie par exercice) ;*
— *laisser une marge sur chaque page, et un bandeau pour les appréciations sur la première ;*
— *écrire à l'encre bleue, de manière lisible ;*
— *débuter la copie par les mots « j'ai lu les consignes » pour montrer que vous avez tout lu.*

Questions de cours

1. Soient A et B deux énoncés mathématiques.
   (a) Quelle est la négation de « $A \implies B$ » ?
   (b) Quelle est la contraposée de « $A \implies B$ » ?
   (c) Quelle est la rédaction-type pour démontrer « $A \implies B$ » ?
2. Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$.
   (a) Donner la définition de « f est décroissante ».
   (b) Donner la définition de « f est majorée ».
   (c) Donner la définition de « f admet un minimum ».
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le polynôme du second degré défini par $x \mapsto x^2 - 7x + 10$.
   (a) Écrire f sous forme canonique. La fonction f admet-elle un maximum ? un minimum ?
   (b) Dresser sans justification le tableau de variation de f.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $u_1, \dots, u_n$ et $v_1, \dots, v_n$ des réels tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i = 20$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_i = 17$.
   (a) Calculer la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (7u_i - 10v_i)$ en citant le nom de la propriété utilisée.
   (b) Calculer $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} u_{i+1}$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_{n+1-i}$ en justifiant précisément le résultat.
5. Donner sans simplification la valeur des sommes suivantes :

$$\sum_{k=7}^{2017} 10, \qquad \sum_{k=0}^{710} (2017)^k, \qquad \sum_{k=1}^{2017} k, \qquad \sum_{k=1}^{20} k^2, \qquad \sum_{k=1}^{10} k^3.$$

Exercice 1

On considère les fonctions $f : x \mapsto (\ln(x)+1)^2$ et $g : x \mapsto (1-x)^{\sqrt{x}}$ ainsi que $h = g \circ f$.

6. (a) Déterminer le domaine de définition de f.

   (b) Rappeler la définition de l'ensemble-image $f(\mathbb{R}_+^*)$, puis l'exprimer sous la forme d'un intervalle.

   (c) Calculer de même l'ensemble-image $f\big([e^{-10}; e^7]\big)$.

7. Exprimer g sous forme exponentielle et déterminer son domaine de définition D_g.

8. Déterminer le domaine de définition de la composée $f \circ g$, puis expliciter cette fonction.

9. (a) Soit $x > 0$. Montrer que la fonction $h = g \circ f$ est définie en x si et seulement $|\ln(x)+1| < 1$.

   (b) En déduire D_h, le domaine de définition de h.

   (c) Montrer que pour tout $x \in D_h$:

$$h(x) = \big((\ln(x)+2) \times \ln\big(\tfrac{1}{x}\big)\big)^{|\ln(x)+1|}$$

10. (a) Justifier que pour tout $x \in D_g,\ g(x) \leqslant e^{-x^{3/2}}$.

    (b) En déduire que h admet le nombre 1 comme maximum.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dont le domaine de définition D est symétrique par rapport à 0.

11. (a) Formuler avec des quantificateurs l'assertion « f est paire ».

    (b) Formuler avec des quantificateurs l'assertion « f n'est pas paire ».

12. On suppose dans cette question que f est définie par $x \mapsto \ln(2|x|+x)$.

    (a) Déterminer le domaine de définition de f et vérifier qu'il est symétrique par rapport à 0.

    (b) La fonction f est-elle paire ? est-elle impaire ?

13. Soient $g : D \to \mathbb{R}$ une fonction paire et $h : D \to \mathbb{R}$ une fonction impaire.

    (a) Rappeler la définition de la fonction $g+h$.

    (b) Montrer que si $f = g+h$, alors : $\forall x \in D,\ g(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$.

    (c) Montrer que si $f = g+h$, alors : $\forall x \in D,\ h(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$.

14. Démontrer qu'il existe f_0 paire et f_1 impaire définies sur D telles que $f = f_0 + f_1$.

15. Justifier que le couple de fonctions (f_0, f_1) vérifiant ces propriétés est unique.

    On dit que f_0 est la *partie paire* de f et que f_1 est sa *partie impaire.*

16. Déterminer la partie paire et la partie impaire de la fonction $x \mapsto 7x^2 - 10x + 2017$.

17. On suppose à nouveau que f est définie par $x \mapsto \ln(2|x|+x)$.

    (a) Montrer que f admet pour partie paire la fonction $f_0 : x \mapsto \ln(|x|\sqrt{3})$.

    (b) Exprimer de même la partie impaire f_1 et montrer qu'elle ne prend que deux valeurs.

Exercice 3

L'objectif de cet exercice est d'étudier quelques propriétés des deux fonctions numériques suivantes :

$$\phi : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \qquad \psi : y \mapsto \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$

Propriétés de symétrie

18. Déterminer le domaine de définition de ϕ.
19. La fonction ϕ est-elle paire ? est-elle impaire ?
20. Déterminer le domaine de définition de ψ.
21. La fonction ψ est-elle paire ? est-elle impaire ?

Étude de ϕ

22. (a) Montrer que pour tout x réel, $|e^x - e^{-x}| \leqslant |e^x + e^{-x}|$.
    (b) En déduire que ϕ est bornée sur $\mathbb{R}$.
    (c) La fonction ϕ est-elle majorée ? est-elle minorée ?
23. *Variations.* On introduit deux fonctions auxiliaires $u : x \mapsto \exp(2x)$ et $v : x \mapsto \dfrac{x-1}{x+1}$.
    (a) Déterminer deux réels a et b tels que :
    $$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad v(x) = a + \frac{b}{x+1}$$
    (b) En déduire le tableau de variation de v.
    (c) Exprimer les fonctions $u \circ v$ et $v \circ u$, puis déterminer leurs domaines de définition.
    (d) Montrer que $\phi = u \circ v$ ou $\phi = v \circ u$.
    (e) Établir finalement le tableau de variation de ϕ.
24. *Ensemble-image.*
    (a) Montrer que pour tous x et y réels :
    $$\phi(x) = y \iff (1-y)e^{2x} = 1+y$$
    (b) Rappeler la définition de l'ensemble-image $\phi(\mathbb{R})$.
    (c) Déterminer cet ensemble et l'écrire sous la forme d'un intervalle.
25. La fonction ϕ admet-elle un maximum ? un minimum ?

Étude de ψ à l'aide de ϕ

26. *Relation entre ϕ et ψ.*
    (a) Montrer que pour tous x réel et $y \in \left]-1;1\right[$, on a l'équivalence :
    $$\psi(y) = x \iff y = \phi\left(\frac{x}{2}\right)$$

(b) Simplifier alors l'expression des fonctions composées $\phi \circ \psi$ et $\psi \circ \phi$.

27. *Monotonie.*

    (a) Soient y_1 et y_2 dans $]-1;1[$ tels que $y_1 < y_2$. Démontrer par l'absurde que $\psi(y_1) < \psi(y_2)$.

    (b) En déduire que ψ est strictement monotone et préciser le sens de variation.

28. Déterminer l'ensemble-image de la fonction ψ.

29. (a) Formuler avec des quantificateurs l'assertion « ψ n'est pas bornée ».

    (b) La fonction ψ est-elle bornée ? Admet-elle un maximum ? un minimum ?

Quelques calculs

30. Vérifier que pour tous a et b réels :

$$\phi(a+b) = \frac{\phi(a)+\phi(b)}{1+\phi(a)\phi(b)}, \qquad \text{et} \qquad \phi(a-b) = \frac{\phi(a)-\phi(b)}{1-\phi(a)\phi(b)}.$$

31. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1+\phi(x)^2}{1-\phi(x)^2} = \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}, \qquad \text{et} \qquad \frac{2\phi(x)}{1-\phi(x)^2} = \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}.$$