Ensembles et applications
Exercices

E1A 2016-2017

Opérations ensemblistes

I Dans chacune des questions suivantes, on donne un ensemble E et des parties A et B de E. Déterminer explicitement les ensembles $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap \overline{B}$ ainsi que $\overline{A} \cap B$.

a. $E = \{1,2,3,4\}$, $A = \{1,2\}$, $B = \{2,4\}$

b. $E = \mathbb{R}$, $A =]-\infty;3]$, $B = [2;+\infty[$

c. $E = \mathbb{R}$, $A =]-\infty;2]$, $B = [3;+\infty[$

d. $E = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{N}$, $B =]0;+\infty[$

II X, Y et Z désignent des ensembles.
Démontrer les affirmations suivantes :

a. Si $X \subset Y$ alors $X \cap Z \subset Y \cap Z$.

b. $(X \subset Y) \Leftrightarrow (X = X \cap Y)$

c. $X = (X \cap Y) \cup (X \setminus Y)$

d. $(X \cap Y) \cap (X \cap Z) = X \cap Y \cap Z$

III **(Distributivité)** Soit E un ensemble, A et B deux parties de E.

a. Montrer que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

b. Montrer que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

c. Montrer que : $(A \cap B = A \cup B) \;\Leftrightarrow\; A = B$.

IV Soit A une partie d'un ensemble E. Démontrer que :

a. $(\forall X \in \mathfrak{P}(E),\; A \cup X = E) \;\Rightarrow\; A = E$.

b. $(\forall X \in \mathfrak{P}(E),\; A \cap X = \emptyset) \;\Rightarrow\; A = \emptyset$.

V **(Différence symétrique)** Soit E un ensemble. Pour tous $(X,Y) \in \mathfrak{P}(E)^2$, on note $X \Delta Y$ l'ensemble $(X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$. Soient A et B deux parties de E.

a. Que valent $A \Delta A$ et $A \Delta \emptyset$?

b. Montrer que $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

c. Montrer que $A \Delta B = (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$.

d. Montrer que $(A \Delta B) \Delta B = A$.

VI A, B, C étant trois parties d'un ensemble E, montrer que :

$$\left.\begin{array}{rcl} A \cup B & \subset & A \cup C \\ A \cap B & \subset & A \cap C \end{array}\right\} \Rightarrow B \subset C$$

Ensemble des parties d'un ensemble E

VII On note $E = \{1\}$ et $F = \{1, \pi\}$.

a. Détailler $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E))$ et $\mathfrak{P}(F)$.

b. Est-ce que l'un est inclus dans l'autre ?

VIII Soient A et B deux ensembles.

a. Démontrer que $\mathfrak{P}(A \cap B) \;=\; \mathfrak{P}(A) \cap \mathfrak{P}(B)$.

b. Démontrer que $\mathfrak{P}(A \cup B) \;\supset\; \mathfrak{P}(A) \cup \mathfrak{P}(B)$. Y a-t-il égalité ?

Image d'une application

IX Déterminer l'image par $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ des intervalles $[0,3]$, $[-1,2]$, $\mathbb{R}$.

X Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une application définie et continue sur un intervalle I.

a. Si f est strictement croissante, quelle est l'image de $[a,b]$, $]a,b]$, $]a,b[$, $[a,b[$?

b. Répondre à la même question lorsque f est strictement décroissante.

c. Que peut-on dire dans le cas où f est simplement (dé)croissante ?
Et si l'on ne connaît pas la monotonie de f ?

XI Soient $f : E \mapsto F$ une application et A_1 et A_2 des parties de E.

a. Démontrer que : $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

b. Démontrer que : $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$. Dans quel cas a-t-on égalité ?

Composition

XII On considère les deux applications f et g de $[\![1,9]\!]$ dans lui-même définies par leurs tables de valeurs :

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	6	4	7	8	9	3	5	1	2

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$g(x)$	1	2	7	4	5	6	3	8	9

a. Représenter de la même façon les applications $g\circ g$, $g\circ f$, $f\circ f$, $f\circ g$.

b. Montrer que f est bijective et représenter de la même façon sa réciproque.

XIII Soient $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ et $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ deux applications définies par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ f(n) = n+1,\quad \begin{cases} g(0) = 0 \\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ g(n) = n-1 \end{cases}$$

a. Étudier l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité, éventuelle de f et g.

b. Préciser $f\circ g$ et $g\circ f$.

Caractère injectif / surjectif / bijectif

XIV **a.** L'application $x\mapsto 2x$ est-elle injective, surjective, bijective, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? Et de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$? Et de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}$?

b. L'application $x\mapsto x^2$ est-elle injective, surjective, bijective, de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$? Et de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$? Et de $\mathbb{Q}^+$ dans $\mathbb{Q}^+$?

XV On considère l'application $g:\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{-1\} & \to & \mathbb{R}\setminus\{1\} \\ x & \mapsto & \dfrac{x+2}{x+1}\end{array}\right.$

a. Démontrer que g est une bijection et déterminer sa réciproque.

b. Répondre aux mêmes questions pour $f:\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to &]-1,1[\\ x & \mapsto & \dfrac{x}{1+|x|}\end{array}\right.$

XVI Soit $f:E\to F$ une application. Que signifient les propositions suivantes ?

a. $\forall x\in E,\ \exists y\in F,\ y=f(x)$

b. $\forall y\in F,\ \exists x\in E,\ y=f(x)$

c. $\exists y\in F,\ \forall x\in E,\ y=f(x)$

XVII Soient E,F,G trois ensembles, $f:E\to F$, $g:F\to G$ deux applications.

a. Montrer que si $g\circ f$ est injective, alors f est injective.

b. Montrer que si $g\circ f$ est surjective, alors g est surjective.

XVIII Soient E,F,G trois ensembles, $g:E\to F$, $h:E\to F$, $f:F\to G$ trois applications. Démontrer que si $f\circ g = f\circ h$ et f est injective, alors $g=h$.

XIX Soit $f:E\to E$ une application vérifiant $f\circ f\circ f = id_E$.
Montrer que f est bijective et déterminer son inverse.

XX Dans chacun des cas suivants, l'application f est-elle injective, surjective, bijective ?

a. $\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2\end{array}\right.$

b. $\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2\end{array}\right.$

c. $\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^2\end{array}\right.$

d. $\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^2\end{array}\right.$

e. $\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \xrightarrow{f} & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & x^2\end{array}\right.$

f. $\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{Q}^+ & \xrightarrow{f} & \mathbb{Q} \\ x & \mapsto & x^2\end{array}\right.$

g. $\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \xrightarrow{f} & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1\end{array}\right.$

h. $\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{f} & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n+1\end{array}\right.$

i. $\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \xrightarrow{f} & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n+1\end{array}\right.$

j. $\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x}\end{array}\right.$

k. $\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{Q}^* & \xrightarrow{f} & \mathbb{Q}^* \\ x & \mapsto & \frac{1}{x}\end{array}\right.$

l. $\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & |x|\end{array}\right.$

XXI Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$$

a. Soit $y\in\mathbb{R}$. Déterminer en fonction de y le nombre d'antécédents de y.

b. L'application f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

c. Montrer que $\forall x\in[-1,1], f(x)\in[-1,1]$.
La restriction $g:[-1,1]\to[-1,1]$ de f est-elle bijective ?

XXII Démontrer que les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont en bijection.

XXIII Soit E un ensemble, $A\in\mathfrak{P}(E)$. On note :

$$\begin{array}{cccc} \varphi_A : & \mathfrak{P}(E) & \to & \mathfrak{P}(E) \\ & X & \mapsto & A\cap X\end{array}\quad \text{et} \quad \begin{array}{cccc} \psi_A : & \mathfrak{P}(E) & \to & \mathfrak{P}(E) \\ & X & \mapsto & A\cup X\end{array}$$

a. Sous quelle condition φ_A est-elle surjective ? Injective ?

b. Même question pour ψ_A.