Colles de mathématiques en E1A

Probabilités, variables aléatoires réelles discrètes

Semaine 27 : du 8 au 12 mai

1 Connaissances exigibles

1.1 Probabilités générales : reprise de tout le programme précédent

1.2 Variables aléatoires réelles, cas discret

Cours :

— Définition d'une variable aléatoire réelle. Support. Construction des évènements $[X \in I]$ associés à une variable X lorsque I est un intervalle. Système complet d'évènements associé à une variable aléatoire.

— Loi d'une variable aléatoire réelle, fonction de répartition, caractérisation de la loi par la fonction de répartition. Propriétés de la fonction de répartition (encadrement, croissance, limites, continuité à droite).

— Notion d'ensemble dénombrable. Variables aléatoires réelles discrètes (à support fini ou infini), caractérisation de la loi par les probabilités atomiques $\mathbb{P}([X = x])$, cas des variables aléatoires à valeurs entières. Transformation d'une variable aléatoire discrète par une fonction.

— Théorème d'existence des lois discrètes. Application aux lois usuelles à support fini ou infini : certaine, Bernoulli, binomiale, uniforme, géométrique, Poisson. Interprétations et situations où ces lois apparaissent.

— Espérance d'une variable aléatoire réelle discrète, idée de moyenne pondérée et propriétés fondamentales : linéarité, positivité, croissance. Théorème de transfert, moments d'ordre $r \in \mathbb{N}$.

— Variance, lien avec le moment d'ordre 2, formule de König-Huygens. Interprétation en termes de dispersion, cas de la variance nulle, écart-type. Calcul de l'espérance et de la variance des lois discrètes usuelles : certaine, Bernoulli, binomiale, uniforme, géométrique, Poisson.

Méthodes essentielles à savoir appliquer :

— Exprimer et représenter graphiquement la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle de loi connue.

— Calculer la probabilité d'un évènement $[X \in I]$ à l'aide de la fonction de répartition de X.

— Déterminer le support et la loi d'une variable aléatoire réelle discrète dans une situation concrète.

— Pour une variable aléatoire discrète X, calculer $\mathbb{P}([X \in I])$ à l'aide des $\mathbb{P}([X = x])$ pour $x \in X(\Omega)$.

— Justifier l'existence d'une loi de probabilité discrète lorsque les nombres $(\mathbb{P}([X = x]))_{x \in X(\omega)}$ sont donnés.

— Reconnaître une loi discrète usuelle dans une situation concrète (typiquement un schéma de Bernoulli).

— Justifier qu'une variable aléatoire admet une espérance ou un moment d'ordre r avec $r \in \mathbb{N}$.

— Calculer une espérance ou un moment d'ordre $r \in \mathbb{N}$ à l'aide du théorème de transfert.

— Mettre un œuvre le calcul d'une variance à l'aide de la formule de König-Huygens.

2 Questions de cours suggérées

Les énoncés font partie de la question. Chacune des notions évoquées dans l'énoncé ou sa preuve doit pouvoir être définie précisément sur demande du colleur. Il ne s'agit par de réciter par cœur les démonstrations, mais de les comprendre et de savoir les refaire, en détaillant les arguments si besoin.

A. Fonction de répartition et probabilité d'un intervalle $]a, b]$

Énoncé. *Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et dont la fonction de répartition est $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$. Alors, pour tous a et b réels tels que $a \leq b$,*

$$\mathbb{P}([a < X \leq b]) = F(b) - F(a).$$

Démonstration. Soient a et b réels tels que $a \leq b$. On décompose $F(b) = \mathbb{P}([X \leq b])$ à l'aide de la formule des probabilités totales, appliquée au système complet formé par les deux évènements contraires $[X \leq a]$ et $[X > a]$. On en déduit alors :

$$\mathbb{P}([X \leq b]) = \mathbb{P}([X \leq b] \cap [X > a]) + \mathbb{P}([X \leq b] \cap [X \leq a]).$$

Le premier évènement $[X \leq b] \cap [X > a]$ n'est autre que $[a < X \leq b]$. Pour simplifier le second, on remarque que $[X \leq a] \subset [X \leq b]$ car $a \leq b$: ainsi $[X \leq b] \cap [X \leq a] = [X \leq a]$. On obtient :

$$\mathbb{P}([X \leq b]) = \mathbb{P}([a < X \leq b]) + \mathbb{P}([X \leq a]).$$

Or $\mathbb{P}([X \leq b]) = F(b)$ et $\mathbb{P}([X \leq a]) = F(a)$, donc on conclut finalement par soustraction. $\square$

B. Loi des variables aléatoires discrètes

Énoncé. *Soit X une variable aléatoire réelle* discrète *définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Alors :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}([X \leq t]) = \sum_{x \in X(\Omega), x \leq t} \mathbb{P}([X = x]).$$

De plus, la fonction $x \mapsto \mathbb{P}([X = x])$ définie sur $X(\Omega)$ caractérise la loi de X.

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{R}$. On sait que les évènements atomiques $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ forment un système complet d'évènements (qui est dénombrable) donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}([X \leq t]) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X \leq t] \cap [X = x]).$$

Si $x > t$, les évènements $[X \leq t]$ et $[X = x]$ sont incompatibles, d'où $\mathbb{P}([X \leq t] \cap [X = x]) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$. Les seuls termes non nuls dans la somme correspondent donc à un indice x tel que $x \leq t$, auquel cas on a simplement $[X \leq t] \cap [X = x] = [X = x]$ car $[X = x] \subset [X \leq t]$. La formule annoncée en découle.

Remarquons maintenant que $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ définie par $t \mapsto \mathbb{P}([X \leq t])$ est la fonction de répartition de X. D'après la formule établie, la fonction F est déterminée par les nombres $\mathbb{P}([X = x])$ pour $x \in X(\Omega)$. La conclusion en découle car on sait que la fonction de répartition F caractérise la loi de X. $\square$

C. Tableau des lois discrètes usuelles

Le candidat reproduit sans démonstration le tableau des lois discrètes usuelles : *lien cliquable vers le tableau.* Entraînement nécessaire pour y parvenir sans hésitations et en moins de 15 minutes !

Avertissement : tolérance zéro sur le type des objets !

La nature impalpable du hasard rend sa formalisation mathématique particulièrement abstraite. Pour espérer s'y retrouver, il est donc indispensable d'être *parfaitement* au point sur les notations, les définitions et le type des objets manipulés. Les examinateurs se feront un devoir de contrôler ceci et de châtier comme il se doit toutes les horreurs du genre *somme d'évènements*, *probabilité d'une fonction*, *intersection de nombres*, etc. Voici un petit test pour vous entraîner à la maison, et dont ils pourront librement s'inspirer.

On se place dans un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et on considère A un évènement, ω une issue, X une variable aléatoire réelle positive, F sa fonction de répartition et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour chacun des objets mathématiques suivants :

- $\{\omega\}$,
- $\mathscr{A}$,
- A,
- $\mathbb{P}$,
- $\mathbb{P}(\overline{A})$,
- $\mathrm{Card}(\Omega)$,
- I,
- X,
- $X(\omega)$,
- $X(\Omega)$,
- $[X \in I]$,
- $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$,
- $[X \geqslant 0] \cup [X \in I]$,
- $\mathbb{P}([X \geqslant 0])$,
- $\mathbb{P}([X \geqslant 0] \cap [X \in I])$,
- F,
- $F(1)$,
- $F(\mathbb{R})$,
- $\mathbb{P}_{[X \geqslant 0]}([X \in I])$,
- $\mathbb{P}_{[X \in I]}$,

dire s'il s'agit ...
— d'un nombre (dans quel intervalle ?)
— d'un sous-ensemble, d'une partie (de quel ensemble ?)
— d'une fonction ou d'une application (avec quels ensembles de départ et d'arrivée ?)

Au fait, quelle est la définition de $[X \in I]$? de $X(\Omega)$? de F ? de $\mathbb{P}_{[X \geqslant 0]}([X \in I])$?