Colles de mathématiques en E1A

Probabilités, limites de fonctions

Semaine 15 : du 16 au 20 janvier

1 Remarques particulières

- Attention aux erreurs sur le type des objets manipulés : ensembles, nombres, fonctions. Les horreurs du genre « somme d'évènements », « union de nombres », « $\Omega = n$ », « $\mathbb{P} \in [0, 1]$ », seront dument châtiées.
- Un objectif central de la semaine est le calcul pratique de limites par les méthodes élémentaires et dans le cas des formes indéterminées : merci aux colleurs de tester ces points techniques avant d'envisager des questions plus théoriques. Étudier l'existence d'un prolongement par continuité serait bienvenu.

2 Connaissances exigibles

2.1 Probabilités sur un univers fini

Cours :

- Vocabulaire probabiliste : univers, issue, évènement. Notion de probabilité sur un univers fini. Principe d'inclusion-exclusion de Poincaré. Système complet d'évènements. Théorème d'additivité. Une probabilité sur un univers fini est déterminée par les images des évènements élémentaires.
- Indépendance. Indépendance mutuelle. Probabilité conditionnelle. Formule des probabilités composées. Formule des probabilités totales. Formule de Bayes.

Méthodes essentielles à savoir appliquer :

- Modéliser une expérience aléatoire par un univers probabilisé fini.
- Calculer une probabilité dans une situation d'équiprobabilité par un dénombrement élémentaire (tirages).
- Démontrer que deux évènements sont (ou ne sont pas) indépendants.
- Décomposer une probabilité (selon un système complet d'évènements) avec la formule des probabilités totales.
- Calculer la probabilité d'évènements dépendants en utilisant la formule des probabilités composées.
- Déterminer une probabilité conditionnelle, éventuellement à l'aide de la formule de Bayes.

2.2 Limites de fonctions

Cours :

- Limite ponctuelle d'une fonction. Limite à gauche, limite à droite. Opérations algébriques sur les limites. Composition des limites avec une fonction ou une suite. Passage à la limite dans les inégalités. Théorème d'encadrement. Théorème de la limite monotone. Limites infinies.
- Croissances comparées en $+\infty$ des fonctions logarithmes, puissances, exponentielles. Croissances comparées en 0^+ des fonctions logarithmes et puissances. Limite de $\ln(1 + x)/x$ pour $x \to 0$.
- Continuité ponctuelle. Prolongement par continuité en un point. Les fonctions usuelles, sauf la partie entière, sont continues en tout point de leur domaine de définition.

Méthodes essentielles à savoir appliquer :

- Calculer des limites à partir des fonctions usuelles et des opérations algébriques.
- Composer des limites, en utilisant éventuellement un changement de variable et la continuité.
- Démontrer une limite à l'aide un encadrement, éventuellement avec des valeurs absolues.
- Identifier le terme dominant dans une somme à l'aide des croissances comparées.
- Lever une indétermination avec des racines carrées en utilisant par la quantité conjuguée.
- Étudier la continuité, ou l'existence d'un prolongement continu, en un point, d'une fonction.

3 Questions de cours suggérées

Les énoncés font partie de la question. Chacune des notions évoquées dans l'énoncé ou sa preuve doit pouvoir être définie précisément sur demande du colleur. Il ne s'agit par de réciter par cœur les démonstrations, mais de les comprendre et savoir les refaire, en détaillant éventuellement les arguments.

3.1 Probabilité conditionnelle

Proposition. *Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ un évènement tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$. La fonction*

$$E \longmapsto \frac{\mathbb{P}(A \cap E)}{\mathbb{P}(A)}$$

définit une application $\mathbb{P}_A : \mathcal{P}(\Omega) \to [0;1]$ qui est une probabilité.

La démonstration a été rappelée dans le programme de la semaine 12, que vous retrouverez à l'adresse suivante : `http://www.normalesup.org/~bureaux/carnot/2016/maths-e1a/colles/semaine12.pdf`.

3.2 Croissances comparées

Proposition. *Pour tous α, β, γ strictement positifs,*

En $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)^\alpha}{x^\beta} = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\beta}{e^{\gamma x}} = 0.$ *(de manière informelle, $\ln(x)^\alpha \ll x^\beta \ll e^{\gamma x}$)*

En 0^+ : $\lim\limits_{x\to0^+} |\ln(x)|^\alpha\, x^\beta = 0.$ *(de manière informelle, $|\ln(x)|^\alpha \ll 1/x^\beta$)*

La preuve des croissances comparées en $+\infty$ n'a pas été détaillée en cours. Elle est admise.

Démonstration des croissances comparées en 0^+. Notre stratégie consiste à nous ramener aux croissances comparées en $+\infty$ à l'aide d'un changement de variable. Soit $x > 0$. Posons $y = 1/x$. Alors $x = 1/y$, donc

$$|\ln(x)|^\alpha\, x^\beta = \left|\ln\left(\tfrac{1}{y}\right)\right|^\alpha \left(\frac{1}{y}\right)^\beta = |-\ln(y)|^\alpha \frac{1}{y^\beta} = \frac{|\ln(y)|^\alpha}{y^\beta} = \frac{|\ln(1/x)|^\alpha}{(1/x)^\beta}.$$

On sait que $\lim_{x\to0^+} 1/x = +\infty$. De plus, $\lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{\ln(y)^\alpha}{y^\beta} = 0$ d'après les croissances comparées en $+\infty$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln(1/x)^\alpha}{(1/x)^\beta} = 0$ par application du théorème de composition des limites.
Ceci conclut la démonstration car $|\ln(y)| = \ln(y)$ dès que $y \geq 1$, en particulier lorsque $y \to +\infty$. □

3.3 Limite du taux d'accroissement du logarithme

Proposition. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Une démonstration utilisant les notions de limite à gauche et à droite a été vue en cours. En voici une autre, reposant sur le même encadrement, mais qui utilise la valeur absolue. Les élèves sont libres de choisir celle qu'ils préfèrent.

Démonstration. En vue d'appliquer le théorème d'encadrement, notre stratégie consiste à chercher une fonction auxiliaire g telle que

$$\forall x > -1, \quad \left|\frac{\ln(1+x)}{x} - 1\right| \leq g(x), \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to0} g(x) = 0.$$

Soit $x > -1$. D'après l'inégalité de concavité du logarithme, on sait que $\ln(1+x) \leq x$, d'où $\ln(1+x) - x \leq 0$, de sorte que

$$|\ln(1+x) - x| = x - \ln(1+x) = x + \ln\left(\frac{1}{1+x}\right) \leq x + \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{x^2}{1+x}.$$

Puisque $x^2 = |x|^2$, on en déduit que pour tout x réel tel que $x > -1$ et $x \neq 0$:

$$\left|\frac{\ln(1+x)}{x} - 1\right| = \left|\frac{\ln(1+x) - x}{x}\right| = \frac{|\ln(1+x) - x|}{|x|} \leq \frac{|x|}{1+x}.$$

Or $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{|x|}{1+x} = 0$, donc d'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} - 1 = 0.$ □