

Test 2, durée 45min.
Les calculatrices, documents, et téléphones portables sont interdits.

Exercice 1 :

Sur $\mathbb{R}_3[X]$ on considère les formes bilinéaires suivantes. Dire lesquelles sont des produits scalaire.

$$\phi(P, Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$$

$$\phi(P, Q) = \int_{-1}^1 P'(t)Q(t) + P'(t)Q'(t)dt$$

$$\phi(P, Q) = \int_{-1}^1 P'(t)Q'(t)dt + P(0)Q(0)$$

$$\phi(P, Q) = \sum_{i=0}^3 a_i b_i \quad \text{où } P = \sum_{i=0}^3 a_i X^i, \quad Q = \sum_{i=0}^3 b_i X^i$$

Exercice 2 :

On considère l'espace euclidien \mathbb{R}^4 muni du produit scalaire canonique.

1. Déterminer une base orthonormée du sous-espace vectoriel F de \mathbb{R}^4 engendré par les vecteurs

$$V_1 = (1, 0, 1, 0), \quad V_2 = (0, 1, -1, 0), \quad V_3 = (0, 2, 3, 1),$$

puis compléter cette base en une base orthonormée de \mathbb{R}^4 .

2. Écrire la matrice de la projection orthogonale sur F dans la base canonique.