

Feuille de TD 3
Intégrales paramétrées

Exercice 1 :

Soit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par : $F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt$.

1. Montrer que F est de classe \mathcal{C}^2 . Calculer $F(0)$ et $F'(0)$.
2. Montrer que F est strictement décroissante et convexe.
3. Montrer que l'on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = +\infty$.

Exercice 2 :

Soit F la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $F(x) = \int_0^1 \ln(1 + xe^t) dt$.

1. Montrer que F est dérivable sur $[0, +\infty[$.
2. Donner une expression sans intégrale de $F'(x)$ pour tout $x \in [0, +\infty[$.

Exercice 3 :

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(tx) dt$ converge.

On définit l'application $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en posant $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(tx) dt$.

2. Montrer que F est de classe \mathcal{C}^1 .
3. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = -\frac{x}{2}F(x)$.
4. En déduire une expression explicite de $F(x)$.

Exercice 4 :

1. Soit $x \geq 0$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin t}{t} dt$ converge.

2. On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin t}{t} dt$. Montrer que F est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$.

3. Calculer $F'(x)$. En déduire que $F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$ puis que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 5 :

Soit F la fonction définie sur \mathbb{R} par : $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{(1+t^2)^2} dt$.

1. Montrer que F est dérivable sur \mathbb{R} .
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, F'(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{1+t^2} dt$.

Exercice 6 : On pose $\alpha = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$ et pour $x \geq 0$, on pose $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t^2 x}}{1+t^2} dt$ et $G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t+x}} dt$.

1. Montrer que F et G sont bien définies et continues sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et montrer que $F(x) - F'(x) = 2\alpha/\sqrt{x}$.
3. Montrer que G est dérivable sur $]0, +\infty[$. Au moyen d'une intégration par parties, montrer que pour $x > 0$, on a $G(x) - G'(x) = 1/\sqrt{x}$.
4. Pour tout $x \geq 0$ on pose $H(x) = (F(x) - 2\alpha G(x))e^{-x}$.
 - a) Montrer que pour $x > 0$, on a $H'(x) = 0$.
 - b) Montrer que $H(0) = \pi - 4\alpha^2$.
 - c) Montrer que $0 \leq F(x) \leq \pi$ et $0 \leq G(x) \leq 2\alpha$ pour tout $x \geq 0$.
 - d) En déduire que $\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 7 :

On définit une fonction $\varphi : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ en posant $\varphi(0) = 1$ et $\varphi(t) = \frac{\arctan(t)}{t}$ si $t > 0$. On pose pour tout $x \geq 0$:

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x\varphi(xt)}{1+t^2} dt$$

1. Montrer que φ est continue sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que F est définie et continûment dérivable sur $[0, +\infty[$.
3. Montrer que pour tout $x \in [0, 1[\cup]1, +\infty[$: $F'(x) = \frac{\pi}{2(1+x)}$.
Indication : pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, on a : $\frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} = \frac{1}{1-x^2} \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{x^2}{1+x^2t^2} \right)$.
4. Cette expression de $F'(x)$ est-elle encore valide pour $x = 1$? (on répondra sans effectuer le moindre calcul).
5. Déduire de ce qui précède une expression de $F(x)$ sans intégrale.

Exercice 8 :

Soit F et G les fonctions définies sur \mathbb{R} par $F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \exp\left(-\frac{x^2}{\cos^2 t}\right) dt$ et $G(x) = \left(\int_0^x e^{-u^2} du\right)^2$.

1. Montrer que F et G sont dérivables sur \mathbb{R} et que l'on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F'(x) = -2x \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{\cos^2 t}\right)}{\cos^2 t} dt, \quad G'(x) = 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du$$

2. En effectuant le changement de variable $u = x \tan(t)$ dans la dernière intégrale, en déduire pour tout $x \in \mathbb{R}$: $G'(x) + F'(x) = 0$, puis que la fonction $F + G$ est constante. Déterminer cette constante.
3. Montrer que l'on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$: $0 \leq e^{-x^2/\cos^2 t} \leq e^{-x^2}$. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$ puis la valeur exacte de l'intégrale impropre :

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$$