Université Paris 7 - Denis Diderot | Cours de Mathématiques-MP4
Licence de Physique, L2 | 2011-2012, 2^{nd} semestre

Correction du test 2

Exercice 1 :

- $\phi(P,Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}\,t$.
  ϕ est bien symétrique car pour tous $P, Q \in \mathbb{R}^3[X]$, on a
  $$\phi(Q,P) = \int_{-1}^{1} Q(t)P(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}\,t = \phi(P,Q).$$
  De plus, $\phi(P,P) = \int_{-1}^{1} P^2(t)\,\mathrm{d}\,t \geqslant 0$, nul uniquement si P est nul sur $]-1,1[$, c'est-à-dire si $P = 0$. Donc ϕ est définie-positive, c'est donc un produit scalaire.
- $\phi(P,Q) = \int_{-1}^{1} P'(t)Q(t) + P'(t)Q(t)\,\mathrm{d}\,t$.
  ϕ n'est pas symétrique car
  $$\phi(X,1) = \int_{-1}^{1} 1 + 1\,\mathrm{d}\,t = 4,$$
  alors que
  $$\phi(1,X) = \int_{-1}^{1} 0 + 0\,\mathrm{d}\,t = 0.$$
  Ce n'est donc pas un produit scalaire.
- $\phi(P,Q) = \int_{-1}^{1} P'(t)Q'(t)\,\mathrm{d}\,t + P(0)Q(0)$.
  ϕ est symétrique pour la même raison que dans le premier point (un produit de réels est commutatif).
  De plus, $\phi(P,P) = \int_{-1}^{1} P'(t)^2\,\mathrm{d}\,t + P(0)^2 \geqslant 0$, nul uniquement si P' est nul sur $]-1,1[$ et $P(0) = 0$, c'est-à-dire si $P' = 0$ et $P(0) = 0$, soit $P = 0$. Donc ϕ est définie-positive, c'est donc un produit scalaire.
- $\phi(P,Q) = \sum_{i=0}^{3} a_i b_i$ où $P = \sum_{i=0}^{3} a_i X^i$, $Q = \sum_{i=0}^{3} b_i X^i$.
  ϕ est ici ausi symétrique (car l'expression est symétrique en P et Q).
  De plus, $\phi(P,P) = \sum_{i=0}^{3} a_i^2 \geqslant 0$, nul uniquement si tous les a_i sont nuls, c'est-à-dire si $P = 0$. Donc ϕ est définie-positive, c'est donc un produit scalaire.

Exercice 2 :

- On commence par orthonormaliser la famille V_1, V_2, V_3, qui est clairement libre, en une base orthonormale e_1, e_2, e_3 de F, grâce au procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt :
  $$e_1 = \frac{V_1}{\|V_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0).$$
  $$V_2 - < V_2, e_1 > e_1 = (0,1,-1,0) - \frac{1}{\sqrt{2}} * (-1)\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0) = (1/2,1,-1/2,0),$$
  Donc
  $$e_2 = \frac{(1/2,1,-1/2,0)}{\|(1/2,1,-1/2,0)\|} = \sqrt{\frac{2}{3}}(1/2,1,-1/2,0).$$

Et enfin

$$
\begin{aligned}
V_3 - < V_3, e_1 > e_1 - < V_3, e_2 > e_2 &= (0,2,3,1) - \frac{1}{\sqrt{2}} * 3\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0) - \sqrt{\frac{2}{3}} * \frac{1}{2} * \sqrt{\frac{2}{3}}(1/2,1,-1/2,0) \\
&= (0,2,3,1) - \frac{3}{2}(1,0,1,0) - \frac{1}{3}(1/2,1,-1/2,0) \\
&= \frac{1}{3}(-5,5,5,3),
\end{aligned}
$$

donc

$$
e_3 = \frac{\frac{1}{3}(-5,5,5,3)}{\|\frac{1}{3}(-5,5,5,3)\|} = \frac{1}{2\sqrt{21}}(-5,5,5,3)
$$

Une base orthonormée de F est donc la base (e_1, e_2, e_3) constituée des trois vecteurs calculés précédemment.
Pour compléter cette base en une base de $\mathbb{R}^4$, il suffit par exemple d'y ajouter un des vecteurs de la base canonique qui n'est pas déjà dans F et de "terminer" l'orthonormalisation : prenons par exemple $V_4 = (0,0,0,1)$ (pratique car son produit scalaire par e_1 et e_2 vaut 0). En continuant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, on a :

$$
\begin{aligned}
V_4 - < V_4, e_1 > e_1 - < V_4, e_2 > e_2 - < V_4, e_3 > e_3 &= (0,0,0,1) - 0 - 0 - \frac{3}{2\sqrt{21}} * \frac{1}{2\sqrt{21}}(-5,5,5,3) \\
&= \frac{5}{28}(1,-1,-1,5),
\end{aligned}
$$

et donc

$$
e_4 = \frac{\frac{5}{28}(1,-1,-1,5)}{\|\frac{5}{28}(1,-1,-1,5)\|} = \frac{1}{2\sqrt{7}}(1,-1,-1,5).
$$

- On calcule les projections sur F des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$:
  - ◇ $(1,0,0,0)$:

$$
\frac{1}{2}(1,0,1,0) + \frac{1}{6}(1,2,-1,0) - \frac{5}{84}(-5,5,5,3) = \frac{1}{28}(27,1,1,-5)
$$

  - ◇ $(0,1,0,0)$:

$$
\frac{2}{6}(1,2,-1,0) + \frac{5}{84}(-5,5,5,3) = \frac{1}{28}(1,27,-1,5)
$$

  - ◇ $(0,0,1,0)$:

$$
\frac{1}{2}(1,0,1,0) - \frac{1}{6}(1,2,-1,0) + \frac{5}{84}(-5,5,5,3) = \frac{1}{28}(1,-1,27,5)
$$

  - ◇ $(0,0,0,1)$:

$$
\frac{1}{28}(-5,5,5,3)
$$

Et la matrice de la projection orthogonale sur F dans la base canonique est donc :

$$
\frac{1}{28}\begin{pmatrix} 27 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 27 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 27 & 5 \\ -5 & 5 & 5 & 3 \end{pmatrix}
$$

(on vérifie qu'on a bien une trace de 3, et que la matrice est symétrique vu qu'on a une projection orthogonale)