Correction du partiel

Exercice 1 :

1. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,t) = \ln(1+e^{x+t})$. f est continue comme somme et composée de fonctions continues (la fonction $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,t) \mapsto e^{x+t}$ est déjà un composé de l'exponentielle avec la fonction polynomiale $(x,t) \to x+t$. La fonction $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,t) \mapsto 1+e^{x+t}$ est la somme de la fonction constante 1 sur $\mathbb{R}$ et de la fonction f_1, et f la composée de la fonction $\ln\colon]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ avec la fonction f_2, en remarquant que $f_2(\mathbb{R}) \subset]0,+\infty[)$. De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x,t)$ est dérivable comme somme et composée de fonctions dérivables et on a :
$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{e^{x+t}}{1+e^{x+t}}$$
Enfin, la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est continue comme composée et quotient de fonctions continues. Par restriction à $\mathbb{R}\times[0,1]$, f et $\frac{\partial f}{\partial x}$ sont également continues. On en déduit que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int_0^1 f(x,t)\,\mathrm{d}\,t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que
$$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}\,t,$$
grâce au théorème de dérivation sous le signe $\int$.
2. En fait, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto f(x,t)$ est aussi dérivable comme somme et composée de fonctions dérivables, et on a :
$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = \frac{e^{x+t}}{1+e^{x+t}} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,t).$$
Alors
$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) &= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}\,t = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}\,t = [f(x,t)]_{t=0}^1 = f(x,1) - f(x,0)\\ &= \ln(1+e^{x+1}) - \ln(1+e^x) = \ln\left(\frac{1+e^{x+1}}{1+e^x}\right)\end{aligned}$$
3. Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, on a les implications :
$$e^{x+t} > 0 \implies 1+e^{x+t} > 1 \implies \ln(1+e^{x+t}) > \ln(1) = 0 \implies F(x) = \int_0^1 \ln(1+e^{x+t})\,\mathrm{d}\,t > 0$$
(En effet, si $F(x) = 0$, comme la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue et positive, on a $\forall t \in [0,1], \ln(1+e^{x+t}) = 0$, ce qui contredit l'inégalité ci-dessus). De plus, comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{1+e^{x+1}}{1+e^x} > 1$ (car $e^{x+1} > e^x$), on a
$$F'(x) = \ln\left(\frac{1+e^{x+1}}{1+e^x}\right) > \ln 1 = 0.$$
F est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4. • On a :
$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, 1+e^{x+t} \geqslant e^{x+t},$$
et donc $f(x,t) = \ln(1+e^{x+t}) \geqslant \ln(e^{x+t}) = x+t$. Alors
$$F(x) = \int_0^1 f(x,t)\,\mathrm{d}\,t \geqslant \int_0^1 (x+t)\,\mathrm{d}\,t = x + \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = x + \frac{1}{2}.$$
Or, $\lim_{x\longrightarrow+\infty}(x+\frac{1}{2}) = +\infty$, donc $\lim_{x\longrightarrow+\infty} F(x) = +\infty$.
   • Par ailleurs, on sait que $\forall x \geqslant 0, \ln(1+x) \leqslant x$, et donc $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \ln(1+e^{x+t}) \leqslant e^{x+t}$. Alors
$$F(x) = \int_0^1 \ln(1+e^{x+t})\,\mathrm{d}\,t \leqslant \int_0^1 e^{x+t}\,\mathrm{d}\,t = \left[e^{x+t}\right]_{t=0}^1 = e^{x+1} - e^x = e^x(e-1).$$
Or, $\lim_{x\longrightarrow-\infty} e^x = 0$, donc $\lim_{x\longrightarrow-\infty} e^x(e-1) = 0$ et donc $\lim_{x\longrightarrow-\infty} F(x) = 0$ (car $F(x) \geqslant 0$).
5. On a aussi
$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^2, e^{x+t} \geqslant e^0 = 1,$$
et donc $2e^{x+t} \geqslant 1 + e^{x+t}$. Alors :
$$\ln(2) + x + t = \ln(2) + \ln(e^{x+t}) = \ln(2e^{x+t}) \geqslant \ln(1+e^{x+t}) = f(x,t),$$
donc
$$\ln(2) + x + \frac{1}{2} = \int_0^1 (\ln(2) + x + t)\,\mathrm{d}\,t \geqslant \int_0^1 f(x,t)\,\mathrm{d}\,t = F(x).$$
Ainsi, grâce à la question 4, on a
$$\forall x \geqslant 0, \ln(2) + x + \frac{1}{2} \geqslant F(x) \geqslant x + \frac{1}{2}.$$
Si $x>0$, $1+\frac{1}{x}(\ln(2)+\frac{1}{2}) \geqslant \frac{F(x)}{x} \geqslant 1+\frac{1}{2x}$. Or, $\lim_{x\longrightarrow+\infty} 1+\frac{1}{x}(\ln 2+\frac{1}{2}) = 1 = \lim_{x\longrightarrow+\infty}(1+\frac{1}{2x})$. On en déduit que $\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{F(x)}{x} = 1$ et donc $F(x) \sim x$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$.

Exercice 2 :
1. Pour $\alpha \in \{2,3\}$, on a $\frac{1}{(x+t)^\alpha} \sim_{t\longrightarrow+\infty} \frac{1}{t^\alpha}$ (car pour $t>0$, $\frac{1}{(x+t)^\alpha} = \frac{1}{t^\alpha(1+\frac{x}{t})^\alpha}$ où $\lim_{t\longrightarrow+\infty}(1+\frac{x}{t})^\alpha = 1$). Or, l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\,t}{t^\alpha}$ converge (puisque $\alpha>1$) et $\frac{1}{(x+t)^\alpha} > 0$. Donc l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\,t}{(t+x)^\alpha}$ converge, ainsi que $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\,t}{(t+x)^\alpha}$. D'où la conclusion voulue.
2. $$\forall t>0, \left|\frac{\sin t}{(x+t)^2}\right| \leqslant \frac{1}{(x+t)^2}.$$
Or, l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\,t}{(t+x)^2}$ converge. Donc l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{(t+x)^2}\,\mathrm{d}\,t$ converge absolument, et a fortiori elle converge.
3. • Notons $f :]1,+\infty[\times[0,+\infty[\to \mathbb{R},\ (x,t) \mapsto \frac{\sin t}{(x+t)^2}$. f est continue comme quotient de fonctions continues (la fonction $f_1 :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,t) \mapsto \sin t$ est continue par composition de la fonction $\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec la projection canonique $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,t) \mapsto t$, et la fonction $f_2 :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,t) \mapsto (x+t)^2$ est continue car elle est polynomiale. Enfin, par restriction, f_1 et f_2 restent continues sur $]1,+\infty[\times[0,+\infty[$).

- Pour chaque $t \geqslant 0$, la fonction $]1,+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\sin t}{(x+t)^2}$ est dérivable car c'est une fraction rationnelle, et on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\frac{2\sin t}{(x+t)^3}$.
- La fonction $\frac{\partial f}{\partial x}\colon]1,+\infty[\times[0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est continue comme quotient de fonctions continues.
- De plus, il existe $x \in]1,+\infty[$ tel que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}\,t$ converge (par la question 2).
- L'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(\cdot,t)\,\mathrm{d}\,t$ converge normalement sur $]1,+\infty[$ car

  $$\forall x > 1, \forall t \geqslant 0, \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\frac{-2\sin t}{(x+t)^3}\right| \leqslant \frac{2}{(x+t)^3} \leqslant \frac{2}{(1+t)^3}$$

  (car $x > 1$, donc $x+t > 1+t > 0$ et donc $(x+t)^3 > (1+t)^3$), où l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}\,t}{(1+t)^3}$ converge (d'après la question 1).

Finalement, par le théorème de dérivation sous le signe $\int$ (le cas non compact), la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ et on a :

$$\forall x > 1, F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}\,t = \int_0^{+\infty} \frac{-2\sin t}{(x+t)^3}\,\mathrm{d}\,t = -2\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{(x+t)^3}\,\mathrm{d}\,t$$

4. Soit $R > 0$. On a l'intégration par parties :

$$\int_0^R \sin t(-2(x+t)^{-3})\,\mathrm{d}\,t = \left[\sin t(x+t)^{-2}\right]_{t=0}^R - \int_0^R (x+t)^{-2}\cos t\,\mathrm{d}\,t, \tag{1}$$

ou encore :

$$\int_0^R \frac{-2\sin t}{(x+t)^3}\,\mathrm{d}\,t = \left[\frac{\sin t}{(x+t)^2}\right]_{t=0}^R - \int_0^R \frac{\cos t}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}\,t.$$

Or, $\lim_{R\longrightarrow+\infty} \frac{\sin R}{(x+R)^2} = 0$ (car $\left|\frac{\sin R}{(x+R)^2}\right| \leqslant \frac{1}{(x+R)^2} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$), et les intégrales impropres $\int_0^{+\infty} \frac{-2\sin t}{(x+t)^3}\,\mathrm{d}\,t$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}\,t$ convergent (car $\left|\frac{\cos t}{(x+t)^2}\right| \leqslant \frac{1}{(x+t)^2}$ où l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\,t}{(x+t)^2}$ converge). On en déduit que l'identité (1) passe à la limite lorsque $R \longrightarrow +\infty$ et que

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-2\sin t}{(x+t)^3}\,\mathrm{d}\,t = -\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}\,t.$$

5. Soit $g :]1,+\infty[\times[0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $(x,t) \mapsto \frac{-\cos t}{(x+t)^2}$. g est continue comme quotient de fonctions continues. Pour tout $t \geqslant 0$, la fonction $]1,+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x,t)$ est dérivable (c'est une fraction rationnelle) et $\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \frac{2\cos t}{(x+t)^3}$. La fonction $\frac{\partial g}{\partial x}\colon]1,+\infty[\times[0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est continue comme quotient de fonctions continues. De plus, il existe $x \in]1,+\infty[$ tel que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} g(x,t)\,\mathrm{d}\,t$ converge (voir la question 4). Enfin, l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(\cdot,t)\,\mathrm{d}\,t$ converge normalement sur $]1,+\infty[$ car :

$$\forall x > 1, \forall t \geqslant 0, \left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\frac{2\cos t}{(x+t)^3}\right| \leqslant \frac{2}{(x+t)^3} \leqslant \frac{2}{(1+t)^3},$$

où l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{2}{(1+t)^3}\,\mathrm{d}\,t$ converge (voir la question 1).

On en déduit, par le théorème de dérivation sous le signe $\int$, que la fonction $F'\colon]1,+\infty[\to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et que

$$\forall x > 1, F''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}\,t = \int_0^{+\infty} \frac{2\cos t}{(x+t)^3}\,\mathrm{d}\,t = 2\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(x+t)^3}\,\mathrm{d}\,t$$

6. *Il y avait une erreur dans l'énoncé, l'équation différentielle à montrer était*

$$y'' + y - \frac{1}{x^2} = 0$$

Soit $R > 0$. On a l'intégration par parties :

$$\int_0^R \cos t(-2(x+t)^{-3})\,\mathrm{d}\,t = \left[\cos t(x+t)^{-2}\right]_{t=0}^R - \int_0^R (x+t)^{-2}(-\sin t)\,\mathrm{d}\,t, \qquad (2)$$

ou encore :

$$\int_0^R \frac{-2\cos t}{(x+t)^3}\,\mathrm{d}\,t = \left[\frac{\cos t}{(x+t)^2}\right]_{t=0}^R + \int_0^R \frac{\sin t}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}\,t.$$

Or, $\lim_{R\longrightarrow+\infty} \frac{\cos R}{(x+R)^2} = 0$ (car $\left|\frac{\cos R}{(x+R)^2}\right| \leqslant \frac{1}{(x+R)^2} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$), et les intégrales impropres $\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(x+t)^3}\,\mathrm{d}\,t$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}\,t$ convergent (par les questions 2 et 4). On en déduit que l'identité (2) passe à la limite lorsque $R \longrightarrow +\infty$ et que

$$\forall x > 1, -F''(x) = -2\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(x+t)^3}\,\mathrm{d}\,t = -\frac{1}{x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}\,t = -\frac{1}{x^2} + F(x),$$

et donc

$$\forall x > 1, F''(x) + F(x) - \frac{1}{x^2} = 0.$$

F est donc solution de l'équation différentielle proposée.

7. Fixons $a > 0$. Comme à la question 3 et 5, on voit que f et $g\colon]a,+\infty[\times[0,+\infty[\to \mathbb{R}$ sont continues, que les fonctions $]a,+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x,t)$ et $g(x,t)$ sont dérivables pour tout $t \geqslant 0$, et que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial x}\colon]a,+\infty[\times[0,+\infty[\to \mathbb{R}$ sont continues. De plus, il existe $x > a$ tel que les intégrales impropres $\int_0^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}\,t$ et $\int_0^{+\infty} g(x,t)\,\mathrm{d}\,t$ convergent (par les questions 2 et 4), et comme

$$\forall x > a, \forall t \geqslant 0, \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\frac{-2\sin t}{(x+t)^3}\right| \leqslant \frac{2}{(x+t)^3} \leqslant \frac{2}{(a+t)^3}$$
$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{2}{(a+t)^3},$$

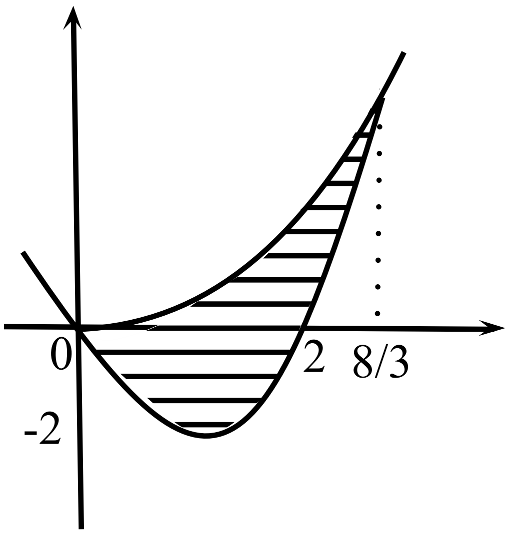
où l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\,t}{(a+t)^3}$ converge (par la question 1). Il en résulte que les intégrales impropres $\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(\cdot,t)\,\mathrm{d}\,t$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(\cdot,t)\,\mathrm{d}\,t$ convergent normalement sur $]a,+\infty[$. De tout cela, on en déduit par le théorème de dérivation sous le signe $\int$ (le cas non compact) que les fonctions F et $G :]a,+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \int_0^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}\,t$ et $\int_0^{+\infty} g(x,t)\,\mathrm{d}\,t$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,+\infty[$ et que

$$\forall x \in]a,+\infty[, F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}\,t = \int_0^{+\infty} g(x,t)\,\mathrm{d}\,t = G(x)$$

où la deuxième égalité se montre comme à la question 4. Ceci étant vrai pour tout $a > 0$, F et G sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et on a $F' = G$, ce qui prouve que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.

Exercice 3 :

1. (a) Dessin de P



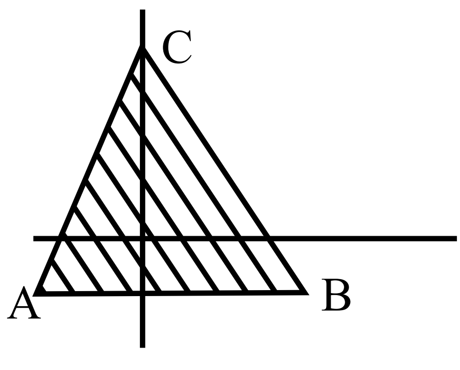
(b) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$(x,y) \in P \iff 2x^2 - 4x \leqslant y \leqslant \frac{x^2}{2} \implies 2x^2 - 4x \leqslant \frac{x^2}{2} \implies 4x^2 - 8x \leqslant x^2$$
$$\implies 3x^2 - 8x \leqslant 0 \implies x(3x-8) \leqslant 0 \implies 0 \leqslant x \leqslant \frac{8}{3}.$$

Ainsi, $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leqslant x \leqslant \frac{8}{3}, \quad 2x^2 - 4x \leqslant y \leqslant \frac{x^2}{2}\}$. Il en résulte que P est quarrable, car les fonctions $[0, \frac{8}{3}] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x^2 - 4x$ et $\frac{x^2}{2}$ sont continues (elles sont polynomiales) et que :

$$\mu(P) = \iint_P \mathrm{d}\, x \,\mathrm{d}\, y = \int_0^{8/3} \left(\int_{2x^2-4x}^{x^2/2} \mathrm{d}\, y \right) \mathrm{d}\, x = \int_0^{8/3} (\frac{x^2}{2} - (2x^2 - 4x)) \,\mathrm{d}\, x$$
$$= \int_0^{8/3} (-\frac{3x^2}{2} + 4x) \,\mathrm{d}\, x = \left[\frac{x^3}{2} + 2x^2 \right]_{x=0}^{8/3} = \left[\frac{x^2}{2}(4-x) \right]_{x=0}^{8/3} = \frac{8^2}{2 \times 3^2}(4 - \frac{8}{3}) = \frac{128}{27}$$

2. Dessin de T



La droite passant par A et B, celle passant par B et C et celle passant par A et C ont respectivement pour équations : $y = 3x + 2$, $y = -\frac{3}{2}x + 2$ et $y = -1$. On en déduit que

$$T = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad y \leqslant 3x + 2, \quad y \leqslant -\frac{3}{2}x + 2, \quad y \geqslant -1\right\}.$$

(a) Si $(x, y) \in T$, alors $3x+y+6 = (3x+2)+(y+4) \geqslant y+(y+4) = 2y+4 \geqslant -2+4 = 2 > 0$. Donc $3x + y + 6 \neq 0$. On en déduit que la fonction $(x, y) \mapsto \frac{1}{(3x+y+6)^2}$ est bien définie sur T.

(b) On peut encore écrire :

$$T = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad -1 \leqslant y \leqslant 2, \quad -\frac{1}{3}(2 - y) \leqslant x \leqslant \frac{2}{3}(2 - y)\right\}.$$

(car si $(x, y) \in T$, alors $y \leqslant 3x + 2$ donc $x \geqslant \frac{1}{3}(y - 2)$, mais aussi $y \leqslant -\frac{3}{2}x + 2$ donc $\frac{2}{3}(2 - y) \geqslant x$ et donc $\frac{2}{3}(2 - y) \geqslant x \geqslant \frac{1}{3}(y - 2) \implies \frac{2}{3}(2 - y) \geqslant \frac{1}{3}(y - 2) \implies 2 \geqslant y$. La réciproque est immédiate). On en déduit que T est quarrable et que

$$I = \iint_T \frac{\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y}{(3x + y + 6)^2} = \int_{-1}^{2} \left(\int_{-\frac{1}{3}(2-y)}^{\frac{2}{3}(2-y)} \frac{\mathrm{d}\,x}{(3x + y + 6)^2}\right) \mathrm{d}\,y$$

Or

$$\int_{-\frac{1}{3}(2-y)}^{\frac{2}{3}(2-y)} \frac{\mathrm{d}\,x}{(3x + y + 6)^2} = \frac{1}{3}\left[\frac{-1}{3x + y + 6}\right]_{x=-\frac{1}{3}(2-y)}^{\frac{2}{3}(2-y)}$$
$$= -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{10 - y} - \frac{1}{2y + 4}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2(y + 2)} + \frac{1}{y - 10}\right).$$

Donc

$$3I = \int_{-1}^{2} \left(\frac{1}{2(y + 2)} + \frac{1}{y - 10}\right) \mathrm{d}\,y = \left[\frac{1}{2}\ln(y + 2) + \ln|y - 10|\right]_{-1}^{2}$$
$$= (\ln 2 + 3\ln 2) - (\frac{1}{2}\ln 1 + \ln 11) = 4\ln 2 - \ln 11 = \ln\frac{16}{11}$$

Ainsi, $I = \frac{1}{3}\ln\frac{16}{11}$.