

Feuille de TD 7
Espaces Euclidiens

Exercice 1 :

Montrer que l'application $(A, B) \mapsto \text{tr}({}^t AB)$ de $M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R})$ à valeurs dans \mathbb{R} est un produit scalaire. Calculer l'orthogonal de l'ensemble des matrices diagonales puis celui des matrices symétriques.

Exercice 2 :

Dans \mathbb{R}^3 muni de son produit scalaire canonique, déterminer la projection orthogonale sur le plan d'équation $x + y + z = 0$ de $(1, 0, 0)$, et plus généralement d'un vecteur (x, y, z) quelconque. Donner la matrice de cette projection ainsi que celle de la symétrie orthogonale par rapport à ce plan.

Exercice 3 :

Dans un espace euclidien de dimension n , on considère un sous-espace F de dimension r et (f_1, \dots, f_r) une base orthonormée de cet espace. On note p_F la projection orthogonale sur F , c'est à dire la projection sur F associée à la décomposition $E = F \oplus F^\perp$.

Montrer que :

$$\forall v \in F, \quad p_F(v) = \langle v, f_1 \rangle f_1 + \langle v, f_2 \rangle f_2 + \dots + \langle v, f_r \rangle f_r.$$

Exercice 4 :

Dans \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire euclidien canonique, donner la matrice de la projection orthogonale sur le plan d'équation $x + 2y - 3z = 0$. Donner la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à ce même plan.

Exercice 5 :

Quelle est la transformation de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est

$$\frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix} ?$$

Exercice 6 :

Déterminer la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^4 de la projection orthogonale sur $\text{Vect}(v_1, v_2)$ où $v_1 = (1, -1, 0, 0)$ et $v_2 = (0, 1, 0, 1)$.

Exercice 7 :

Déterminer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (e^x - (ax + b))^2 dx$.

Exercice 8 :

Soit F le sous-espace de \mathbb{R}^5 engendré par $u = (1, 2, 3, -1, 2)$ et $v = (2, 4, 7, 2, -1)$. Trouver une base de l'orthogonal F^\perp de F .

Exercice 9 :

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que A définit un produit scalaire φ sur \mathbb{R}^3 . Construire une base orthonormale pour φ .

2. Considérons la base (u_1, u_2, u_3) de l'espace euclidien \mathbb{R}^3 , où

$$u_1 = (1, 1, 1), \quad u_2 = (0, 1, 1), \quad u_3 = (0, 0, 1).$$

Utiliser le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt pour transformer $\{v_i\}$ en une base orthonormale.

Exercice 10 :

Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$, $I_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

1. Montrer que l'intégrale I_n est convergente. Que vaut I_{2p+1} ?

Soit $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(P, Q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

2. Montrer que φ est un produit scalaire.

3. On suppose $n = 2$. Écrire la matrice associée à φ dans la base $(1, X, X^2)$. Construire une base orthonormale (P_0, P_1, P_2) par le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt appliqué à $(1, X, X^2)$.

Exercice 11 :

\mathbb{R}^3 est muni de sa structure canonique d'espace vectoriel euclidien. Vérifier que les vecteurs $u_1 = (1, 0, 1)$, $u_2 = (1, 0, 2)$ et $u_3 = (1, 1, 1)$ forment une base de \mathbb{R}^3 et en déterminer l'orthonormalisée de Gram-Schmidt.

Exercice 12 :

\mathbb{R}^4 est muni de sa structure canonique d'espace vectoriel euclidien. Soient $u_1 = (1, 0, 1, 0)$, $u_2 = (1, -1, 1, -1)$ et $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$.

1. Déterminer une base orthonormale de F .

2. Déterminer la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^4 du projecteur orthogonal sur F .

3. Déterminer la distance du vecteur $(1, 1, 1, 1)$ au sous-espace vectoriel F .

4. Déterminer la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^4 de la symétrie orthogonale par rapport à F .

Exercice 13 :

On munit le \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire ϕ défini sur $\mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X]$ par

$$\phi(P, Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt.$$

1. Déterminer l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Déterminer la distance du polynôme $P = X^2 + X + 1$ au sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}_2[X]$ formé des polynômes f tels que $f'(0) = 0$.

Exercice 14 :

Soit $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie de la manière suivante : si $u = (x, y, z)$ et $u' = (x', y', z')$ alors

$$f(u, u') = 2xx' + yy' + 2zz' + xy' + yx' + xz' + zx' + yz' + zy'.$$

1. Montrer que f est un produit scalaire sur \mathbb{R}^3 .

2. Soit P le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 d'équation cartésienne $2x - y + z = 0$.

(a) Déterminer l'orthogonal du sous-espace vectoriel P .

- (b) Déterminer un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 dont l'orthogonal est P .
3. Déterminer l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la base canonique de \mathbb{R}^3 pour f .

Exercice 15 :

Orthonormaliser dans \mathbb{R}^3 la famille $u_1 = (1, -2, -2)$, $u_2 = (-1, 0, -1)$ et $u_3 = (5, -3, 7)$.

Exercice 16 :

A deux polynômes P et Q de $\mathbb{R}_n[X]$, on associe le nombre

$$\phi(P, Q) = \int_0^1 P'(t)Q'(t) dt + P(0)Q(0).$$

1. Montrer que ϕ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Lorsque $n = 2$, donner une base orthonormée pour ce produit scalaire.