Feuille de TD 6
Espaces Euclidiens

Exercice 1 :

1. Montrer que l'application $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$\Phi((x_1, x_2); (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_1y_2 + y_1x_2$$
est un produit scalaire définissant une structure euclidienne de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que l'application $\Psi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par
$$\Psi\big((x_1, x_2, x_3); (y_1, y_2, y_3)\big) = 2x_1y_1+2x_2y_2+2x_3y_3+x_1y_2+y_1x_2+x_2y_3+x_3y_2+x_3y_1+x_1y_3$$
est un produit scalaire définissant une structure euclidienne de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2 :
Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application définie par
$$\varphi(x, y) = 2(x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3) + 3(x_2 + x_3)(y_2 + y_3) + x_3y_3,$$
où $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$.
1. Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique.
2. Déterminer la matrice à laquelle elle est associée.
3. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3 :
Soient a, b, c des paramètres réels et $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application définie par
$$\varphi(x, y) = a(x_1y_2 + x_2y_1) + b(x_2y_3 + x_3y_2) + c(x_3y_1 + x_1y_3),$$
où $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$.
1. Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique.
2. Déterminer la matrice à laquelle elle est associée.
3. Montrer que φ n'est jamais un produit scalaire quelque soit le choix des paramètres réels a, b et c.

Exercice 4 :
Les formes bilinéaires sur $\mathbb{R}^3$ définies pour tous vecteurs $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$, comme ci-dessous, sont-elles des produits scalaires sur $\mathbb{R}^3$:
1. $\varphi_1(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_2y_1 + 2x_1y_2 + x_2y_3 + y_2x_3$.
2. $\varphi_2(x, y) = x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 + 3x_1y_3 + 3x_3y_1$.
3. $\varphi_3(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_2y_1 + x_1y_2 + x_2y_3 + y_2x_3 + x_3y_1 + x_1y_3$.
4. $\varphi_4(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_2y_3 - x_3y_2 + x_1y_3 + y_1x_3$.

5. $\varphi_5(x,y) = x_1y_1 + 13x_2y_2 + 6x_3y_3 - 2x_2y_1 - 2x_1y_2 - x_2y_3 - y_2x_3 - x_3y_1 - x_1y_3$.

On précisera à chaque fois la matrice associée à φ_k.

Exercice 5 :
Lorsque $a \in \mathbb{R}$, on note $\varphi_a : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\varphi(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + (a+12)x_3y_3 - 3x_1y_3 - 3y_1x_3 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2,$$

où $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$.

Déterminer l'ensemble des réels a pour lesquels φ_a est un produit scalaire.

Exercice 6 :
Soit l'application $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$\Phi(X;Y) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_i - x_j)(y_i - y_j),$$

où $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $Y = (y_1, \dots, y_n)$.

1. Φ définit-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$?
2. Soit E le sous-espace vectoriel

$$E = \{X \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}.$$

La restriction de Φ à E est-elle un produit scalaire ?

Exercice 7 :

1. Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$, n nombres réels Montrer l'inégalité

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} x_i\Big| \leqslant \sqrt{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Pour quelle valeur des x_i a-t-on égalité ?

2. Montrer que pour toute fonction continue sur $[-1,1]$, on a

$$\Big|\int_{-1}^{1} f(x)\,dx\Big| \leqslant \sqrt{2}\sqrt{\int_{-1}^{1} f(x)^2\,dx}$$

Dans quel cas a-t-on l'égalité ?

Exercice 8 :
Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n.

1. On définit l'application $\Phi : E \times E \to \mathbb{R}$ par

$$\Phi(P,Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,dt.$$

Montrer que l'application Φ définit un produit scalaire sur E.

2. Calculer une base orthonormée du sous-espace vectoriel engendré par $1, X$ et X^2.

Exercice 9 :
L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de la structure euclidienne canonique. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $v_1 = (1,0,3)$ et $v_2 = (0,2,5)$.

1. Construire une base orthonormée de F. Quel est l'orthogonal $F^\perp$ de F ?
2. Donner la matrice de la projection orthogonale sur F et de la symétrie orthogonale par rapport à F dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Mêmes questions lorsque F est défini par l'équation $2x + 3y - 4z = 0$.

Exercice 10 :
On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de la structure euclidienne canonique et le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$ défini par le système d'équations

$$\begin{cases} x + y + z + t &= 0 \\ x + y - z - t &= 0 \end{cases}$$

1. Donner une base orthonormée de F et une base orthonormée de $F^\perp$, l'orthogonal de F.
2. Donner la matrice de la projection orthogonale sur F dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 11 :
On considère trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$e_1 = (1, 0, 0), \quad u = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \quad v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}).$$

1. Donner les normes de u et v et leur produit scalaire.
2. Trouver la matrice, dans la base canonique, du projecteur orthogonal, noté p, sur le plan vectoriel P engendré par u et v.
3. Trouver un vecteur w tel que (u, v, w) soit une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ et en déduire une équation du plan P.
4. Soit $u' = (1, 0, 1)$. Calculer l'angle entre u' et $p(u')$.

Exercice 12 :
Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation $x - y + z = 0$.

1. Chercher une base orthonormée de $F^\perp$.
2. Soit p_1 et p_2 les projecteurs orthogonaux sur $F^\perp$ et F. Calculer $p_1(v) + p_2(v)$ pour tout $v \in \mathbb{R}^3$. En déduire la matrice de p_1 et la matrice de p_2 dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Soit $u = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$. Calculer $d_1 = \mathrm{dist}(u, F)$ et $d_2 = \mathrm{dist}(u, F^\perp)$ et vérifier la relation
$$d_1^2 + d_2^2 = \|u\|^2.$$

Exercice 13 :
Soit E l'espace des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2. On munit E du produit scalaire

$$\Phi(P, Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\, dt.$$

1. Construire à partir de la base canonique $(1, X, X^2)$ de E une base orthonormée (P_1, P_2, P_3). En déduire l'orthogonal du sous-espace F engendré par $1, X$.
2. Calculer la projection orthogonale du polynôme $Q(X) = 1 + X + X^2$ sur le sous-espace vectoriel F.
3. Calculer
$$\min_{a,b,c \in \mathbb{R}} \int_{-1}^{1} \left(\sin(x) - a - bx - cx^2\right)^2 dx.$$

Exercice 14 :
On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique. Soit F le sous-espace vectoriel défini par le système d'équations

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2y-z+\sqrt{2}t & = & 0 \\ x-3z & = & 0 \end{array}\right.$$

1. Déterminer $F^{\perp}$.
2. Donner une base orthonormée de F et une base orthonormée de $F^{\perp}$.
3. Calculer la projection orthogonale du vecteur $V=(1,1,1,1)$ sur F.
4. Calculer la distance de V à F et la distance de V à $F^{\perp}$.

Exercice 15 :
On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique.

1. Déterminer une base orthonormée du sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs
$$V_1=(1,0,1,0), \quad V_2=(0,1,-1,0), \quad V_3=(0,2,3,1),$$
puis compléter cette base en une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$.
2. Ecrire la matrice de la projection orthogonale sur F dans la base canonique.

Exercice 16 :
Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, on considère le plan vectoriel P engendré par les vecteurs
$$v_1=(1,0,-1), \quad v_2=(2,-1,0).$$

1. Donner une équation de P. Quel est l'orthogonal de P ?
2. En appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $\{v_1,v_2\}$, trouver une base orthonormée $\{w_1,w_2\}$ de P. La compléter en une base orthonormée $\{w_1,w_2,w_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la première composante de w_3 soit positive.
3. Écrire les matrices dans la base $\{w_1,w_2,w_3\}$ de :
   (a) la projection orthogonale p sur P,
   (b) la symétrie orthogonale s par rapport à P.
4. Ecrire les matrices de p et de s dans la base canonique.