

**Feuille de TD 4**  
Calcul d'Intégrales Doubles et Triples

**Exercice 1 :**

Soit  $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y \leq 1 + \frac{x^2}{2}\}$ . Montrer que  $D$  est un domaine quarrable.

Calculer

$$I := \iint_D (x^2 + x + 3) dx dy.$$

**Exercice 2 :**

Soit  $D$  la partie de  $\mathbb{R}^2$  comprise entre l'axe des  $x$ , la droite d'équation  $y = x$  et la droite d'équation  $y = 2 - x$ . Montrer que  $D$  est un domaine quarrable.

Calculer

$$I := \iint_D y dx dy.$$

**Exercice 3 :**

Soit  $D$  le domaine délimité par les droites  $x = 0$ ,  $y = x + 2$  et  $y = -x$ .

1. Calculer (directement)  $I := \iint_D (x - y) dx dy$ .

2. Calculer  $I$  au moyen du changement de variables  $u = x + y$  et  $v = x - y$ .

**Exercice 4 :**

Calculer l'intégrale double

$$I = \iint_D xy\sqrt{x^2 + y^2} dx dy$$

dans les deux cas suivants :

1.  $D$  est défini par  $x^2 + 2y^2 \leq 1$ .
2.  $D$  est défini par  $x^2 + 2y^2 \leq 1$ ,  $x \geq 0$  et  $y \geq 0$ . Dans le deuxième cas, on vérifiera la formule de Fubini i.e. qu'intégrer suivant la variable  $x$  puis  $y$  donne le même résultat que si on intègre d'abord suivant la variable  $y$  puis  $x$ .<sup>1</sup>

---

1. Résultat du 2. :  $\frac{2\sqrt{2}-1}{30\sqrt{2}}$ .

**Exercice 5 (Calculer les intégrales) :**

$$I_1 = \iint_{D_1} (x+y)e^{-x}e^{-y} dx dy \quad \text{où} \quad D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x,y \geq 0; x+y \leq 1\}.$$

$$I_2 = \iint_{D_2} (x^2 + y^2) dx dy \quad \text{où} \quad D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < x; y < x^2 + y^2\}.$$

$$I_3 = \iint_{D_3} \frac{xy}{1+x^2+y^2} dx dy \quad \text{où} \quad D_3 = \{(x,y) \in [0,1]^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1\}.$$

$$I_4 = \iint_{D_4} \frac{1}{y \cos x + 1} dx dy \quad \text{où} \quad D_4 = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{1}{2}].$$

$$I_5 = \iint_{D_5} xy dx dy \quad \text{où} \quad D_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x,y \geq 0; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\} \text{ avec } a,b > 0.$$

$$I_6 = \iiint_{D_6} z dx dy dz \quad \text{où} \quad D_6 = \{(x,y,z) \in (\mathbb{R}^+)^3 \mid y^2 + z \leq 1; x^2 + z \leq 1\}.$$

**Exercice 6 :**

Soit  $D = [0,1]^2$ . Calculer

$$\iint_D \frac{dx dy}{(x+y+1)^2}.$$

**Exercice 7 :**

Soit  $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x,y \geq 0; x^2 + y^2 - 2y \geq 0; x^2 + y^2 - 1 \leq 0\}$ . Calculer

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy.$$

**Exercice 8 :**

On considère la double intégrale  $I = \iint_D f(x,y) dx dy$ , où le domaine  $D$  est déterminé par les

conditions suivantes

$$0 \leq x \leq \sqrt{a^2 - y^2}, \quad y \geq 0,$$

où  $a$  est un paramètre réel strictement positif.

1. Tracer les contours du domaine  $D$  dans le plan.
2. Trouver les bornes d'intégration :
  - (i) Lorsqu'on intègre d'abord par rapport à  $x$ .
  - (ii) Lorsqu'on intègre d'abord par rapport à  $y$ .Montrer que  $D$  est un domaine quarrable.
3. Calculer l'intégrale  $I$  pour  $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ .

**Exercice 9 :**

Soit  $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2; x \geq y^2\}$ .

1. Dessiner  $D$ . Montrer que  $D$  est un domaine quarrable.
2. Calculer l'intégrale double

$$I := \iint_D \frac{dx dy}{(4x + 4y + 1)^2}.$$

**Exercice 10 :**

Calculer

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x + \sqrt{2x + 1}}.$$